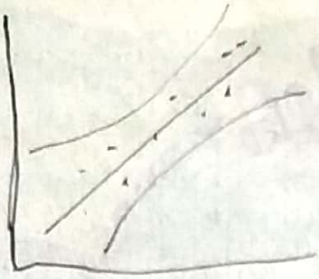
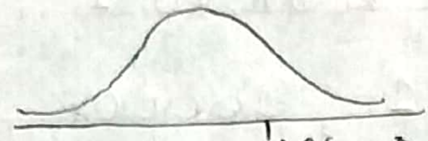
Q-Q plot



Cuantiles → 

1,96 → Percentil = 1 - 0,025

↳ Valores sobre el eje x en la distribucion

Estadistica 1

1) Se lanza un dado al aire. Sea A el evento de que caiga par y el B el evento que caiga impar. Hallar el espacio muestral para los eventos

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A = \{2, 4, 6\}$

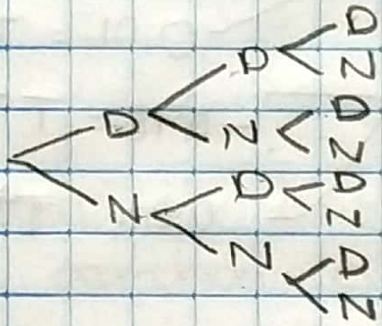
$B = \{1, 3, 5\}$

2) Si examinamos 3 fusibles en secuencia y observamos el resultado de cada examen. Denotaremos D como defectuoso y N no defectuos. Hallar S y los evento

A = 1 D

B = 4 D

C = 3 D



$S = \{DDD, DDN, DND, DNN, NDD, NDN, NND, NNN\}$

$A = \{DNN, NDN, NND\}$

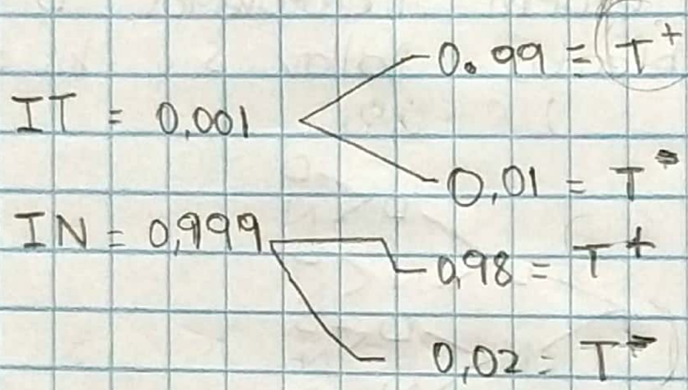
$B = \{\Phi\}$

$C = \{DDD\}$

3) Solo una de cada 1000 personas padece de una cierta enfermedad rara, para la cual se ha creado un una prueba diagnostico. La prueba lo confirma el 99% de las veces, mientras que si el individuo no la tiene, la prueba lo confirmara el 98% de las veces. Si una persona es sometida a la prueba, la probabilidad de que esta indique que tiene la enfermedad es

IT = individuo tiene la enfermedad
IN = individuo no tiene la enfermedad
T^+ = Positivo para detectar
T^- = Negativo para detectar

TEOREMA DE PROBABILIDAD TOTAL



$$P(T^+) = P(T^+|IN)\,P(IN) + P(T^+|IT)\,P(IT)$$

$$=(0,98)(0,999) + (0,99)\cdot(0,001)$$

$$= \boxed{0,98}$$

4) Una prueba de diagnostico para una enfermedad es tal que (correctamente) detecta el 95% de los casos de los individuos que en realidad tienen la enfermedad. Tambien si una persona no tiene la enfermedad, la prueba reportará que no la tiene con probabilidad de 0,92. Solo el 3% de la poblacion tiene la enfermedad. Una persona de dicha poblacion es seleccionada aleatoriamente y la prueba indica que tiene la enfermedad, la probabilidad de que en

realidad no la tenga es:

T^+ = positivo tiene la e

T^- = Negativo tiene lo

3% IT: T^+ 95%, T^- 5%

97% IN: T^+ 8%, T^- 92%

TEOREMA DE BAYES

$$\frac{P(IN)\cdot P(T^+|IN)}{P(IN)\cdot P(T^+|IN)+P(IT)(T^+|IT)}$$

$$\frac{0{,}97\cdot 0{,}08}{(0{,}97\cdot 0{,}08)+0{,}03\cdot 0{,}95}$$

$$\boxed{0{,}73}$$

5) Sea X el número de caras al lanzar 3 monedas la función de distribución acumulada es

Variable discreta

X = # caras

$f(x)$ = f. probabilidad

Binomial

	0C	1C	2C	3C
X	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$
	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{8}$	1

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(1-\frac{1}{2}\right)^1$$

$$3\quad \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}$$

(6) Una moneda se lanza 4 veces. Sea X = # caras − # sellos

La Probabilidad $X > 0$

Obtener mas caras que sellos

X	-4	-2	0	2	4
$f(x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

$$\binom{4}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(1-\frac{1}{2}\right)^3$$

$$2 \cdot \frac{1}{8}$$

$$\boxed{1/4}$$

$$\binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(1-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$6 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{8}$$

$$X > 0 = 1 - X \leq 0$$

$$= 1 - \frac{11}{16}$$

$$= \boxed{\frac{5}{16}}$$

(7) Sea X una variable aleatoria tal que $V[X] = 3$ y $E[X(X-1)] = 5$ $E[X] > 0$

$E[X^2 - X] = 5$

(1) $E[X^2] - E[X] = 5$

$V[X] = E[X^2] - E[X]^2$

(2) $3 = E[X^2] - E[X]^2$

1 − 2

$$E[x^2] - E[x] = 5$$
$$- \quad E[x^2] - E[x]^2 = 3$$

$$E[x]^2 - E[x] = 2$$

$$E[x]^2 - E[x] - 2 = 0$$

$$(E[x]+1)(E[x]-2)$$

$$E[x] > 0$$

$$E[x] = 2$$

$$3 = E[x^2] - 4$$
$$\boxed{7 = E[x^2]}$$

⑧ Sea x una variable aleatoria Continua con densidad dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2x & ; \ 0 < x < 1 \\ 0 & ; \ \text{en otro caso} \end{cases}$$

Sea $Y = 3X - \frac{1}{2}$. La media y varianza de Y son:

Media = $E[X]$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \, f(x)$$

$$= \int_0^1 x \, 2x \, dx = 2\int_0^1 x^2 dx = 2\left[\frac{x^3}{3}\Big|_0^1\right]$$

$$= \frac{2}{3} \qquad E[x] = \frac{2}{3}$$

$E[Y] = E[3X - \frac{1}{2}]$

$= 3E[X] - E[1/2]$

$= 3\frac{2}{3} - \frac{1}{2}$

$= \boxed{\frac{3}{2}}$

$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)$

$\int_0^1 x^2 2x \, dx$

$2\int_0^1 x^3 \, dx$

$2\left(\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1$

$2\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$E[Y^2] = E[(3x - 1/2)^2]$

$= E[9x^2 - \frac{\cancel{2}(3x)}{\cancel{2}} + \frac{1}{4}]$

$= 9E[x^2] - 3E[x] + \frac{1}{4}$

$E[Y^2] = 9\frac{1}{2} - 3\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$

$= \frac{9}{2} - 2 + \frac{1}{4}$

$= \frac{5}{2} + \frac{1}{4}$

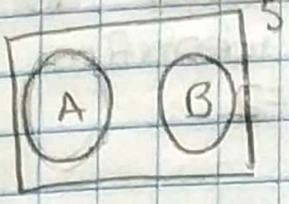
$= \frac{11}{4}$

$Var[Y] = E[Y^2] - E[Y]^2$

$= \frac{11}{4} - \frac{9}{4}$

$= \frac{2}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}$

9) Sean A y B eventos tales que $P(A)>0$ y $P(B)>0$. A' y B' denotan los respectivos complemento de A y B la probabilidad de que ocurra uno solo de los dos eventos



$$P(A\cap B') + P(A'\cap B)$$

10) Se tienen 2 bolsas identicas 1 y 2. La bolsa 1 contiene 4 bolas blancas y 3 negras, la bolsa 2 contiene 3 blancas y 5 negras. Una persona saca al azar bolas de cada bolsa de manera alternada hasta completar 3 bolas. Si empieza sacando de la bolsa 1, la probabilidad de obtener 2 bolas blancas y una negra

b_1: 4 blancas
3 Negras

b_2: 3 blancas
5 Negras

$$P(bbN) = \frac{4}{7}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{6} = \frac{3}{28}$$

$$P(bNb) = \frac{4}{7}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{6} = \frac{5}{28}$$

$$P(Nbb) = \frac{3}{7}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{4}{6} = \frac{3}{28}$$

Probabilidad de obtener 2 bolas blanca y una negra

$$P(bbN) + P(bNb) + P(Nbb) = \frac{3}{28} + \frac{5}{28} + \frac{3}{28}$$

$$= \boxed{\frac{11}{28}}$$

Scanned by CamScanner

(11) Considere un grupo de 5 donadores potenciales (A, B, C, D, E) de los cuales A y B tienen sangre O^+. Cinco muestras de sangre, una de cada individuo, se clasifican en orden aleatorio hasta que se identifica un sujeto con sangre tipo O^+. Sea Y la V.A # de clasificaciones necesarias para identificar el sujeto con O^+. La probabilidad de $Y=2$

A → O^+
B → O^+
C → $-$
D → $-$
E → $-$

__ $\underline{O^+}$ → __ __ la segunda es O^+

$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4}$

↳ la 1ra no es O^+

Y	1	2	3	4	
f(y)	2/5	3/10	1/5	1/10	

$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{5}$

$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2}$

(12) Seis lotes de componentes estan listoss para ser enviados por un proveedor. El número de componentes defectuosos en cada lote es:

Lote	1	2	3	4	5	6
# de defectuosos	0	2	0	1	2	0

Uno de los lotes seleccionados al azar para ser enviado a un cliente en particular. Sea X la variable aleatoria: Número de defectuosos en el lote seleccionado. La probabilidad de que $P(x=1)$ es:

Cada evento (X) tiene una probabilidad de $\boxed{1/6}$

$\boxed{P(X=1) = 1/6}$

(3) $F(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ x^2/4, & 0<x<2 \\ 1, & x\geq 2 \end{cases}$ Sea x una variable aleatoria con distribución acumulada dada por,

El valor esperado de X

Variable continua

Al ser una variable continua debemos hallar E[X] que relaciona a f(x), hallemosla

$F'(x) = f(x)$

$f(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ x/2 & 0<x<2 \\ 0 & x\geq 2 \end{cases}$

$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)$

$= \int_0^2 x \cdot \frac{x}{2} = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]\Big|_0^2$

$= \boxed{\frac{4}{3}}$

(4) Un negocio de computadoras, que atiende pedidos por correo, tiene 6 líneas telefónicas, sea X el número de líneas en uso en un momento específico. La distribución de probabilidad de X está por:

x	0	1	2	3	4	5	6	Otro caso
P(x)	0,1	0,15	0,2	0,25	0,2	0,06	0,04	0

La probabilidad de que por lo menos 3 líneas no estén en uso en un momento dado es

3 líneas no estén en uso $F(x\leq 3) = 0{,}1 + 0{,}15 + 0{,}2 + 0{,}25$

Por que no usamos 4, 5, 6

$= \boxed{7/10}$

Scanned by CamScanner

(15) La calificacion media de un examen de fisica es de 62 puntos sobre 100 posibles, con una desviacion estandar de 10. El profesor sospecha que el examen fue dificil y decide hacer un ajuste de las clasificaciones del tipo $Y = aX + b$, donde X es la la calificacion obtenida en el examen de tal manera que el valor esperado de las calificaciones ajustadas $E[Y] = 70$ con una desviacion estandar de 8 para lograr esto, los valores de a y b que el profesor debe tomar

$$E[Y] = E[aX + b]$$

$$70 = aE[X] + b$$

$$70 = a\,62 + b$$

$$\boxed{a = 0,8 \quad y \quad b = 20,4}$$

Ensayo error

$a = 0,8 \qquad b = 20,4$

$70 = (0,8)\,62 + 20,4$

$\boxed{70 = 70}$

(16) Considere un juego en el que se relaciona una palabra a tres figuras escondidas detras de unos paneles. La persona asigna al azar las tres palabras a las 3 figuras. Si por cada acierto la persona recibe 200 y por cada desacierto paga 100, el valor esperado de sus ganancias

Variable discreta

△ ○ □

	3d	2d	3a
X	-300	0	600
$f(x)$	2/6	3/6	1/6

Δ	O	□	*
T	Ci	Cu	+
T	Cu	Ci	+
Cu	T	Ci	−
Cu	Ci	T	+
Ci	Cu	T	−
Ci	T	Cu	+

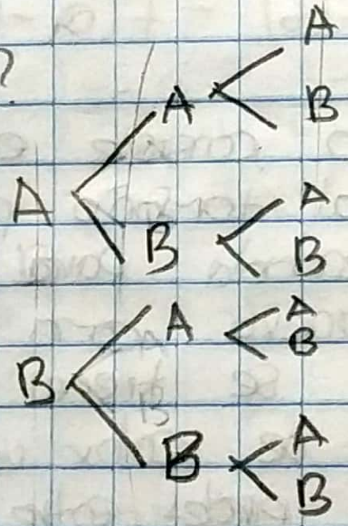
$E[x] = \Sigma \; x \, p(x)$

$= -100 + 0 + 100$

$= \boxed{0}$

17. Los tuercas producidas por cierta Maquina se clasifican de 2 Maneras A: la tuerca cumple con la especificaciones y B: la tuercas que no cumple con las especificaciones. Se selecciona al azar tres de estas tuercas. Si las clasificaciones son independientes, el espacio muestral para este experimento:

S = ?



S = { AAA, AAB, ABA, ABB, BAA, BAB, BBA, BBB

18. Durante un periodo de 24 horas, el tiempo X, un interruptor se pone en posición de "encendido". Mas tarde el tiempo Y, todavía dentro de las 24h el interruptor es "apagado". El resultado del experimento es la pareja (x, y). El espacio muestral para este experimento es:

$S = \{ (x, y) \mid 0 \, x < y < 24)$

19) Sea X una variable aleatoria cuyo rango es un subconjunto de los números enteros, con una distribución de probabilidad P(x) y función de distribución acumulada F(X), sean a y b valores de la variable aleatoria X con a<b. La $P(a \leq X \leq b)$

Variable Discreta

De la fórmula tenemos que

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a^-)$$

↳ límite

Al ser un valor entero
sería el intervalo anterior
de X que significa a-1

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - f(a-1)$$

20) Un experimento psicológico consiste en colocar en fila 5 cubos de igual tamaño pero de diferente color. La persona es vendada para que no pueda influenciar en la manera como se colocan los cubos. Suponga que se tienen dos cubos de color rojo y 3 de color verde. Defina X: Número de bloques verdes entre los dos rojos. La probabilidad X>1 es:

$\boxed{R}\ \boxed{R}\ \boxed{V}\boxed{V}\boxed{V}$

X = Verdes entre rojos

$\boxed{R}\ \boxed{V}\ \boxed{V}\ \boxed{V}\ \boxed{R}$

$\boxed{R}\ \boxed{V}\ \boxed{V}\ \boxed{R}\ \boxed{V}$ +

$\boxed{R}\ \boxed{V}\ \boxed{R}\ \boxed{V}\ \boxed{V}$ −

$\boxed{V}\ \boxed{R}\ \boxed{V}\ \boxed{V}\ \boxed{R}$ +

$\boxed{V}\ \boxed{V}\ \boxed{R}\ \boxed{V}\ \boxed{R}$ −

X	1	2	3			
$F(X)$						

$$P(2) + P(3)$$

$P(3)$

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1}$$

$P(2)$

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{1}$$

Como tenemos 2 posibilidades para $P(2)$ entonces $2P(2)$ y $P(3) = P_2$ entonces $3P(3) = X > 1$

$$3\left(\frac{2}{5} \cdot \frac{\cancel{3}}{4} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{1}\right)$$

$$\frac{6}{20} = \boxed{\frac{3}{10}}$$

$$\boxed{P(X > 1) = 3/10}$$

21) Una compañía proveedora de productos químicos tiene actualmente en existencia 100 ejemplares de cierto producto, que vende a clientes en lotes de 5 libras. Sea X el número de lotes ordenados por un cliente seleccionado al azar y suponga que X tiene la siguiente distribución acumulada

X	$x < 0$	$0 \leq x < 1$	$1 \leq x < 2$	$2 \leq x < 3$	$3 \leq x < 4$	$x \geq 4$
	0	0,2	0,45	0,67	0,84	1

Scanned by CamScanner

La probabilidad de que el número de lotes ordenados por un cliente sea mínimo uno, pero menos de 4 es:

$$P(1 \le X < 4) = F(4^-) - F(1^-)$$

$$= 0{,}84 - 0{,}2$$

$$= \boxed{\frac{16}{25}}$$

(22) Una pequeña farmacia solicita ejemplares de una revista de noticias para su revistero. Sea X la variable aleatoria que indica la demanda semanal (en revistas) de la farmacia. La función de distribución acumulada de X es

X	x<0	0≤x1	1≤x2	2≤x<3	3<x<4	x≥4
F(x)	0	3/15	10/15	11/15	13/15	1

El valor esperado del número de revistas demandado es:

$$E[X] = \Sigma\, X\, P(X)$$

$P(X) = ?$

X	0	1	2	3	4	>4
P(X)	3/15	7/15	1/15	2/15	2/15	0

$$E[X] = \Sigma\, X\, P(X)$$

$$0 + \frac{7}{15} + \frac{2}{15} + \frac{6}{15} + \frac{8}{15} = \boxed{\frac{23}{15}}$$

Scanned by CamScanner

23. El tiempo de vida de cierto tipo de maquina, en años. es una variable aleatoria continua con funcion de densidad de probabilidad dad por

$$f(x) = \frac{1}{3} e^{(-x/3)}$$

para $x>0$. Si la maquina lleva funcionando sin fallar mas de dos años, la probabilidad que falle antes de 3 años

$$P(x<3 \mid x>2) = \frac{P(2<x<3)}{P(x>2)}$$

$$= \frac{\int_2^3 f(x)\,dx}{\int_2^\infty f(x)\,dx} = \frac{\cancel{1/3} \int_2^3 e^{(-x/3)}}{\cancel{1/3} \int_2^\infty e^{(-x/3)}}$$

$$= \frac{[-3e^{(-x/3)}]\Big|_2^3}{[-3e^{(-x/3)}]\Big|_2^\infty} = \frac{-3e^{-1} + 3e^{(-2/3)}}{+3e^{(-2/3)}}$$

$$= \boxed{0,2835}$$

24. La probabilidad de que un estudiante conozca la respuesta correcta a una pregunta de opcion multiple es P. Si el no conoce la respuesta a la pregunta, puede escoger una de K posibles respues al azar si el estudiante responde correctamente la pregunta la probabilidad de que no sepa la respuesta es:

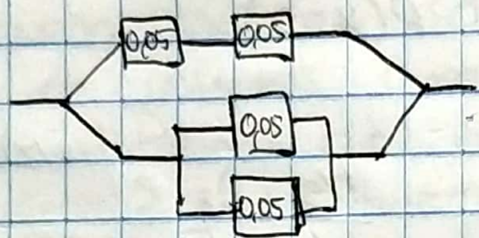
$$P \quad S < \begin{matrix} A & 1 \\ NA & 0 \end{matrix}$$

$$1-P \quad NS < \begin{matrix} A & 1/K \\ NA & 1/K-1 \end{matrix}$$

$$\frac{P(A \mid NS)\,P(NS)}{P(A \mid NS)\,P(NS) + P(A \mid S)\,P(S)}$$

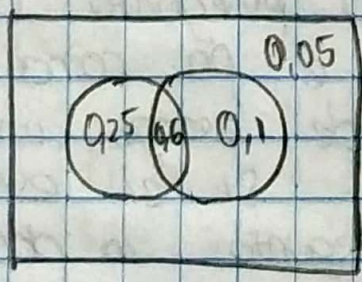
$$\frac{\frac{1}{K}(1-P)(K)}{\frac{1}{K}(1-P)+1P\,(K)} = \boxed{\frac{(1-P)}{(1-P)+KP}}$$

(25) El siguiente sistema funciona si existe una trayectoria de izquierda a derecha en funcionamiento. Este sistema consta de 4 valvulas que funcionan de manera independiente con probabilidad de falla que aparece en cada recuadro. La probabilidad que el sistema no funcione es:



$$2(0,05)^3 + (0,05)^4 = 0,000249$$

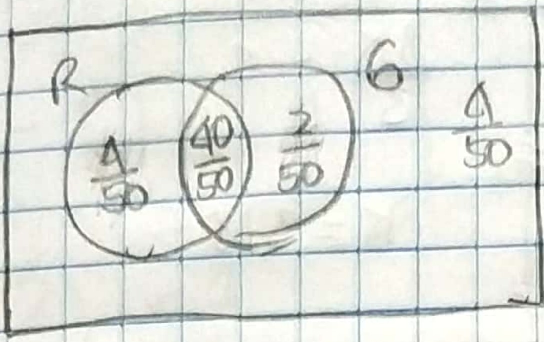
(26) La probabilidad de que un estudiante repita Matematicas I es 0,85, de que repita Geometria es 0,7, de que repita solo matematicas es 0,25 la probabilidad de no repetir alguna de las dos materias es:



$\boxed{0,05}$

(27) Se analizan 50 unidades de policarbonato plastico para determinar su resistencia a las rayaduras y a los golpes. Se encuentra que 44 unidades presentan alta resistencia las rayaduras. 42 presentan alta resistencia a los golpes y 40 presentan alta resistencia a las rayaduras y a los golpes. Si se elige

al azar una de estas unidades, la probabilidad de que presente alta resistencia respecto a solo una de las dos características analizadas



$$\frac{4}{50} + \frac{2}{50} = \boxed{\frac{6}{50}}$$

28) Sea X un VA tal que $E[X] = 3$ $V[X] = 2$
Si $X^2 = 2Y - 1$, $E[Y] = ??$

$$V[X] = E[X^2] - E[X]^2$$
$$2 = E[X^2] - 9$$
$$11 = E[X^2]$$

$$\frac{X^2+1}{2} = Y$$

$$E[Y] = E\left[\frac{X^2}{2} + \frac{1}{2}\right]$$

$$E[Y] = \frac{1}{2} E[X^2] + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{11}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{12}{2} = \boxed{6}$$

29) Sea x una VA.C con densidad dada por

$$f(x) = \begin{cases} Kx^2, & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

Sea $Y = 3x - 1$

$P(Y < 2)$ es

Primero hallemos K

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

$\int_{0}^{2} kx^2 = 1$

$K\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = 1$

$\frac{8K}{3} = 1$

$K = 3/8$

$P(Y \leq 2)$

$Y = 3X - 1$

$P(3X - 1 \leq 2)$

$P(X \leq 1)$

$\int_0^1 f(x)$

$\frac{3}{8}\int_0^1 x^2$

$\frac{3}{8}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1$

$\frac{\cancel{3}}{8}\,\frac{1}{\cancel{3}}$

$P(X \leq 1) = \boxed{\frac{1}{8}}$

(30) Sea X una VAC con f.d.p

$f(x) = k(1-x^2)$, para $-1 \leq x \leq 1$

La probabilidad de que $X < 0{,}75$ es

Hallemos K

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

$2K\int_0^1 (1-x^2)\,dx = 1$

Scanned by CamScanner

$$2K\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = 1$$

$$2K\left(1-\frac{1}{3}\right) = 1$$

$$2K\left(\frac{2}{3}\right) = 1$$

$$K = \frac{3}{4}$$

$P(X \leq 0{,}75) =$

$$\frac{3}{4}\int_{-1}^{3/4} (1-x^2)\,dx$$

$$\frac{3}{4}\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{3/4}$$

Calculadora

$\boxed{0{,}9570}$

~~(31) Una expresión formada ...~~

(31) Dados dos cubos no cargados se lanzan simultaneamente. Sea X el maximo de los dos resultados obtenidos. La probabilidad de que X sea menor o igual a 3 es

X = Max de 2 resultados

Probabilidades totales 36/36

$$P(X \leq 3) = \sum P(x)$$

X	1	2	3		
$P(x)$	1/36	3/36	5/36		

1:1

2:1
1:2
2:2

3:1
3:2
3:3

1:3
2:3

$$P(X \leq 3) = \frac{1}{36} + \frac{3}{36} + \frac{5}{36}$$

$$P(X \leq 3) = \frac{9}{36} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

32) Sea X una variable aleatoria con distribución acumulada dada por

$x<1$	$1\leq x<3$	$3\leq x<4$	$4\leq x<6$	$6\leq x<12$	$x>12$
0	0,3	0,4	0,45	0,6	1

La probabilidad de que $P(x<8 \mid x\geq 4)$ es

$$P(x<8 \mid x\geq 4) = P(4\leq x<8) / P(x\geq 4)$$

$$= F(8) - F(4^-) / F(4)$$

$$= \frac{0,6 - 0,45}{0,45}$$

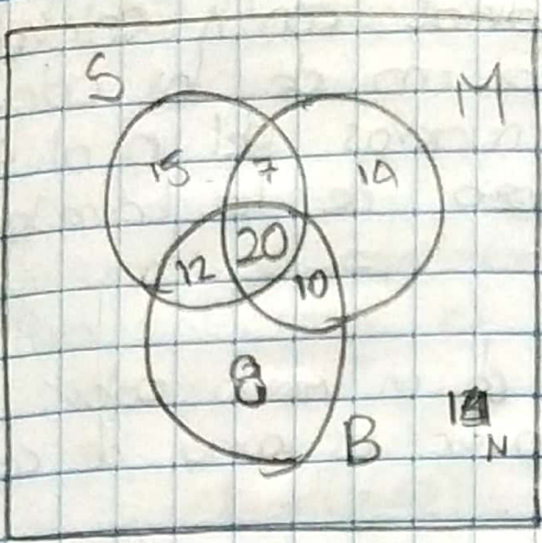
$$= \boxed{0,33}$$

TALLER 1

1. Una universidad ofrece actividades extracurriculares. En el actual semestre particular, ofreció cursos de salsa, bachata, merengue y otros. El total de estudiantes registrados fue de 100 en todos los cursos ofrecidos

Salsa 54
bachata 50
Merengue 51

Salsa y bachata 32
Salsa y merengue 27
bachata y merengue 30
estan en los 3 20



S= Salsa
M= Merengue
B= bachata
N= Ninguno

Probabilidad
a) Salsa o bachata

b) Ninguna propabilidad que no este en ninguno

c) P Salsa y bachata y no en merengue

d) P no este en salsa y no este en bachata

e) P no este en bachata o no este en merengue

a) $P(S \cup B) = P(S) + P(B) - P(S \cap B)$

$= \frac{54}{100} + \frac{50}{100} - \frac{32}{100}$

$= \boxed{\frac{72}{100}}$

b) $\boxed{\frac{19}{100}}$

c) $P(S \cap B \cap M') = \boxed{\frac{12}{100}}$

d) $\boxed{\frac{28}{100}}$

e) $P(B' \cup M') = P(B \cap M)'$

$= 1 - P(B \cap M)$

$= 1 - \frac{30}{100}$

$\boxed{\frac{70}{100}}$

2. Se tiene una baraja de cartas con 4 colores (Amarillo, Azul, Verde y Rojo) cada uno de los colores contiene 2 iguales con los numeros del 0 al 9. Se toma 7 cartas sin remplazo de la baraja mezclada calcule

a) P todas las extraidas sean de un mismo color
b) P sacar un 7 no rojo y sacar las cartas de color rojo?
c) P dos cartas con el # 7 o 7 cartas de color verde

a) 80 cartas
- Amarillas → 20 → 7
- Azules → 20 → 7
- verde → 20 → 7
- Rojo → 20 → 7 → 6

$$P = \frac{\#\text{ casos favorables}}{\#\text{ casos totales}}$$

$$4\,\frac{\binom{20}{7}}{\binom{80}{7}} = \boxed{0{,}0000976}$$

b) $$\frac{\binom{6}{1}\binom{19}{6}}{\binom{80}{7}} = \boxed{0{,}0000351}$$

TALLER 5

1. Sea X el número de exitos en n repeticiones independientes de un experimento aleatorio Bernoulli, donde la probabilidad de exito $P = 1/4$ Hallar

a) $P(X \geq 2)$, con $n=5$

Distribución Binomial

Tengamos en cuenta que es una VAD

Utilicemos el complemento para solucionar el ejercicio

$P(X \geq 2) = \boxed{1 - P(X < 2)}$

Al ser una variable discreta (por saltos se cumple

$1 - P(X<2) = 1 - P(X \leq 1)$

$1 - P(X \leq 1) = ??$

$X \sim bin(n, p)$

n = # de ensayos
p = Probabilidad de cada ensayo

$X \sim bin(5, 1/4)$

$1 - P(X \leq 1) = 1 - [b(1) + b(0)] = 1 - [\binom{5}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(1-\frac{1}{4}\right)^4 + \binom{5}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(1-\frac{1}{4}\right)^5$

$= 1 - [(5/4)(3/4)^4 + (1)(1)(3/4)^5]$

$= 1 - [0,3955 + 0,2373]$

$= 1 - [0,6328]$

$= 0,3672$

$\boxed{P(X \geq 2) = 0,3672}$

Scanned by CamScanner

b) $P(X \geq 3)$ con $n=6$

Distribución binomial

$X \sim bin(6, 1/4)$

$P(X \geq 3) = 1 - P(X<3) = 1 - P(X \leq 2)$

$= 1 - [b(2) + b(1) + b(0)]$

$= 1 - \left[\binom{6}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(1-\frac{1}{4}\right)^4 + \binom{6}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(1-\frac{1}{4}\right)^5 + \binom{6}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(1-\frac{1}{4}\right)^6 \right]$

$= 1 - [(15/16)(3/4)^4 + (6/4)(3/4)^5 + (3/4)^6]$

$= 1 - [0,8306]$

$= 0,1694$

$\boxed{P(X \geq 3) = 0,1694}$

c) El tamaño minimo de n para que garantice $P(X \geq 1) \geq 0,7$

Distribución Binomial

$P(X \geq 1) = 1 - P(X<1) = 1 - P(X=0)$

$= 1 - [b(0)]$

$= 1 - \binom{n}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^n$

$= 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$

$1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n \geq 0,7$

$0,3 \geq \left(\frac{3}{4}\right)^n$

$Ln(0,3) \geq Ln\left(\frac{3}{4}\right)^n$

$Ln(0,3) \geq n\, Ln(3/4)$ ⟶ -

$\frac{Ln(0,3)}{Ln(3/4)} \leq n$

$4,18 \leq n$

$n \geq 4,18$

$\boxed{5 = n}$ ⟶ VAD

2. Todos los dias se seleccionan, de manera aleatoria, 15 unidades de un proceso de manufactura con el proposito de verificar el porcentaje de unidades defectuosas en la produccion. Con base en informacion pasada, la probabilidad de tener una unidad defectuoso es de 0,05. La gerencia ha decidido detener la produccion cada vez que una muestra de 15 unidades tenga dos o mas defectuosas.

-¿Cual es la probabilidad de que, en cualquier dia, la produccion se detenga

X = # de defectuosos en cualquier dia

Distribucion Binomial

$X \sim bin(15, 0{,}05)$

$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X \leq 1)$

$= 1 - [b(1) + b(0)] = 1 - \left[\binom{15}{1}(0{,}05)^1(0{,}95)^{14} + \binom{15}{0}(0{,}05)^0(0{,}95)^{15}\right]$

$= 1 - ((15)(0{,}95)^{14} + (0{,}95)^{15}$

$= 1 - [0{,}8290] = 0{,}1719$

$\boxed{P(X \geq 2) = 0{,}1719}$ → Un 17,19 % de que se detenga la produccion

~~-Cual es la probabilidad de que en un mes laboral de 25 dias la produccion se detenga un maximo de dos veces en 25 dias laborales~~

- Cual es la probabilidad de que, en ~~[illegible]~~ un mes cualquiera se detenga la produccion un maximo de dos veces si la fabrica opera 25 dias al mes?

Y = # de veces que se detiene la produccion en un mes

Distribucion Binomial

$$Y \sim bin(25, 0.1719)$$

$$P(Y \leq 2) = b(2) + b(1) + b(0)$$

$$= \binom{25}{2}(0{,}1719)^2(1-0{,}1719)^{23}$$

$$+ \binom{25}{1}(0{,}1719)^1(0{,}8290)^{24}$$

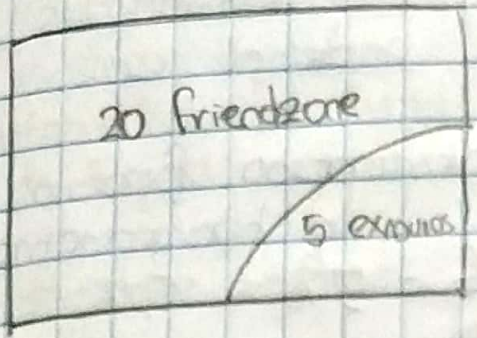
$$+ \binom{25}{0}(0{,}1719)^0(0{,}8290)^{25}$$

$= 0{,}1187 + 0{,}0477 +$

$= \boxed{0{,}1755}$ La probabilidad de que la produccion se detenga un maximo de dos veces en un mes es de 17,55%

3. Yesica Yugeimis conoce 25 hombres que llaman su atencion y se hace novia de 5 de ellos. Tiempo despues sus 5 novios se dieron cuenta del engaño y le terminaron. Si despues de cierto tiempo se reunen 10 de los hombres que conocio ¿cual es la probabilidad de ~~observar~~ ~~[illegible] defectuosos~~ de que entre eso 10 haya 3 de sus exnovios?

Distribución hipergeométrica



$P = \frac{\# \text{ casos favorables}}{\# \text{ casos posibles}}$

X = # exnovios en la muestra

M = Éxitos

N: Tamaño de la población

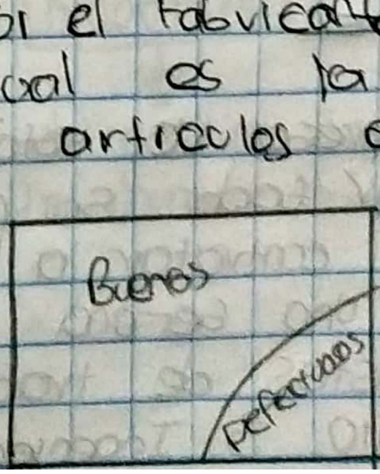
$$X \sim \text{hiper}(10, 5, 25)$$
$$\quad n \;\; R/M \;\; N$$

$$P(X=3) = \frac{\binom{5}{3}\binom{20}{7}}{\binom{25}{10}} = \boxed{0{,}2372}$$

La probabilidad de que entre esos 10 hombres que se encontró de los 25 que conoció 3 hayan sido sus exnovios es de 23,72 %

4. Un fabricante asegura que solo el 5% de su producción total se encuentra defectuosa. Supóngase que se ordenan 1000 artículos y se seleccionan 25 al azar para inspeccionarlos. Si el fabricante se encuentra en lo correcto ¿Cuál es la probabilidad de observar dos o más artículos defectuosos en la muestra?

$$X \sim \text{hiper}(25, R, 1000)$$



El total es bastante grande y la muestra es inferior al 5% por lo que podemos usar aproximacion binomial

Aproximacion Binomial de la hipergeometrica

$$X \sim bin\left(25 \; \frac{R}{N}\right) \qquad \frac{R}{N} = 5\% = 0{,}05$$

$$X \sim bin(25;\, 0{,}05)$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X \leq 1)$$

$$= 1 - [\, b(1) + b(0) \,]$$

$$= 1 - \left[\binom{25}{1} (0{,}05)^1 (0{,}95)^{24} + \binom{25}{0} (0{,}05)^0 (0{,}95)^{25} \right]$$

$$= 1 - [\, (25)(0{,}05)(0{,}05)^{24}$$

$$= 1 - [0{,}6423]$$

$$= \boxed{0{,}3576} \rightarrow$$ La propabilidad de obtener 2 o mas articulos defectuosos es de 35,76%

TALLER 6

1. La empresa VC está contratando personal nuevo, para renovar toda su planta de procesos, el gerente quiere contratar a los mejores del país y durante toda una semana esta haciendo una feria de entrevistas de trabajo. A una entrevista llegan en promedio 3 Ingenieros cada hora

3 ingenieros cada hora = Promedio

a) Encuentre la probabilidad de que en una hora determinada no lleguen ingenieros a la entrevista

X = # de ingenieros en una hora   Distribución de Poisson

$$X \sim P_0(\lambda) \qquad \lambda = 3 = E[X] = Var[X]$$

$$P(X=0)\ ?? = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{X}}{X!} = \frac{e^{-3}\,3^{0}}{0!} = e^{-3} = \boxed{0{,}049}$$

La probabilidad de que no lleguen ingenieros en una hora es de 4,9%

b) Cual es la probabilidad de que en una Jornada de trabajo (8 horas) no lleguen mas de 8 Ingenieros

Y = # de ingenieros en 8 horas

Si $1h \rightarrow 3$ ing $\lambda = 24$
$8h \rightarrow \lambda$ Promedio de ing en 8h

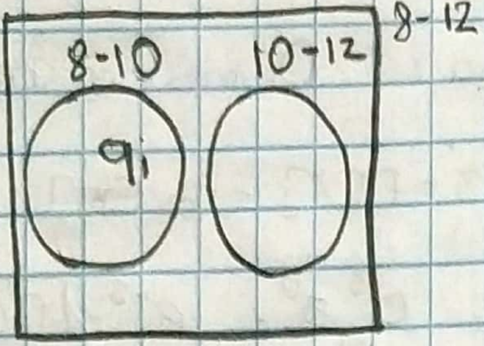
$$Y \sim P_0(\lambda) \quad , \quad \lambda = 24$$

$$P(Y \leq 8)\ ?? = \sum_{0}^{8} \frac{e^{-24} \cdot 24^{Y}}{Y!} = 1{,}505 \times 10^{-4}$$

$$= \boxed{0{,}0001505}$$

La probabilidad de que no lleguen mas de 8 Ing en una Jornada de trabajo es de 0,015%

c) En un dia de entrevista se sabe que entre los 8:00 y los 12:00 se presentaron 9 ingenieros, ¿cual es la probabilidad que todos estos hayan llegado en las primeras ~~horas~~ 2 horas?



Z = # de ingenieros en 4 horas

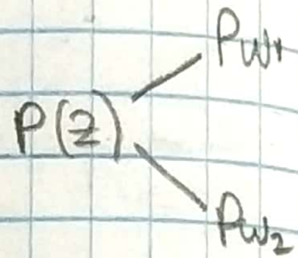
$Z \sim P_0(\lambda)$, $\lambda = 12$

W_1 = # ingenieros de 8-10

$W_1 \sim P_0(\lambda)$, $\lambda = 6$

W_2 = # ingenieros de 10-12

$W_2 \sim P_0(\lambda)$, $\lambda = 6$



$$P(W_1 \wedge W_2 \mid Z) = \frac{P(W_1) \wedge P(W_2) \wedge P(Z)}{P(Z)}$$

$P(W_1)$, $W_1 = 9$
$P(W_2)$, $W_2 = 0$
$P(Z)$, $Z = 9$

$$= \frac{\frac{e^{-6}6^9}{9!} \cdot \frac{e^{-6}6^{0}}{0!}}{\frac{e^{-12}12^9}{\cancel{9!}}} = \frac{e^{-6}\cdot 6^9 \cdot e^{-6}}{e^{-12}\,12^9}$$

$$= \frac{\cancel{e^{-12}}\cdot 6^9}{\cancel{e^{-12}}\,12^9} = \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \boxed{0,00195}$$

Lo probabilidad de que los 9 hayan llegado en los dos primeros horas es de 0,195%

2. Sea X una variable aleatoria con distribucion de probabilidad poisson si se sabe que la probabilidad de que X sea igual a 2 es el doble de la probabilidad de que X sea igual a 3 ¿cual es el valor promedio que se espera obtener de muchas repeticiones de la variable aleatoria X?

$$P(X=2) = 2\,P(X=3)$$

$$\frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2!} = 2\,\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^3}{3!}$$

$$\frac{e^{-\lambda}}{e^{-\lambda}} = \frac{\cancel{2!}\cdot 2\cdot\lambda^3}{\cancel{2!}\cdot 3\cdot\lambda^2}$$

$$1 = \frac{2}{3}\lambda \qquad \boxed{\lambda = \frac{3}{2}} \rightarrow$$

El valor promedio que se espera obtener es 1,5

3. Pacho es un estudiante emprendedor que vende diversos productos en la universidad para costear su manutencion, este semestre se decidio por hacer hamburguesas caseras. Pacho sabe que en promedio, el valor de venta de la hamburguesa (carne, lechuga, tomate, pan y salsas) es de 5000 pesos y el valor maximo, debido al aumento de precio de las verduras o la carne, es de 6000 pesos. Suponga que el valor de venta de las hamburguesas se comporta de forma completamente aleatoria

Distribucion Uniforme

a) Determine la f.d.p y la f.d.a de la variable

X = Precio de Pacho's Burguer

$$X \sim U(a,b)$$

$b = 6000$

$$E[X] = 5000 = \frac{a+b}{2}$$

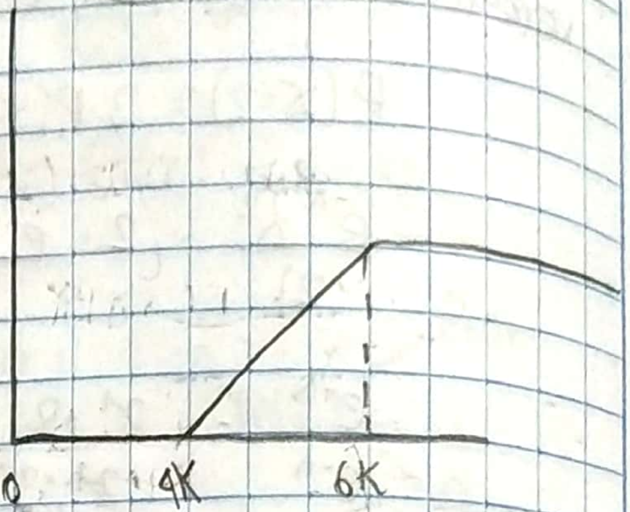
$10000 = a+b$

$10000 = a+6000$

$$\boxed{a = 4000}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2000}, & 4000 \le x \le 6000 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$



$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a \le x \le b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 4000 \\ \dfrac{x-4000}{2000} & 4000 \le x \le 6000 \\ 1 & x > 6000 \end{cases}$$

b) Calcule la probabilidad de que el valor de cada hamburguesa supere los 5500 pesos, esto es importante por que su publico sobrevive con salario de estudiante

$$P(x > 5500) = 1 - P(x \le 5500)$$

$$= 1 - \frac{5500-4000}{2000}$$

$$= 1 - \frac{1500}{2000}$$

$$= \frac{500}{2000}$$

$$= \frac{5}{20} = \frac{1}{4} = \boxed{0,25}$$

Integrando

$$\int_{5500}^{6000} \frac{1}{2000}\, dx = \frac{x}{2000}\Big|_{5500}^{6000}$$

$$= \frac{6000-5500}{2000} = \frac{500}{2000} = \boxed{0,25}$$

La probabilidad de que supere los 5500 es de 25%

Scanned by CamScanner

c) ¿Qué valor de las hamburguesas está excedido por el 95% de los posibles precios

X_x = Valor buscado

$P(X > X_x) = 0{,}95$

$P(X \leq X_x) = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$

$$\frac{X_x - 4000}{2000} = 0{,}05$$

$X_x - 4000 = (0{,}05)(2000)$

$X_x = 100 + 4000$

$\boxed{X_x = 4100}$

El valor que está excedido por el 95% de los precios es 4100

TALLER 7

1 En cada caso determine el valor de la constante c que hace que el enunciado de probabilidad sea correcto

Distribución Normal Tabla.

a) $\Phi(c) = 0{,}9838$

$\boxed{c = 2{,}14}$

$\Phi(c) = 0{,}9838$

$\Phi(2{,}14) = 0{,}9830$

b) $P(0 \leq z \leq c) = 0{,}291$

$\Phi(c) - \Phi(0)$

$\Phi(c) - 0{,}5 = 0{,}291$

$\boxed{c = 0{,}81}$

$\Phi(c) = 0{,}791$

$\Phi(0{,}81) = 0{,}791$

Scanned by CamScanner

c) $P(c \leq Z) = 0{,}121$

Usamos complemento

$1 - P(Z \leq c) = 0{,}121$

$1 - 0{,}121 = P(Z \leq c)$

$P(Z \leq c) = 0{,}879$

$\phi(c) = 0{,}879$ $\boxed{c = 1{,}17}$

$\phi(1{,}17) = 0{,}879$

D) $P(-c \leq Z \leq c) = 0{,}668$

$\Phi(c) - \Phi(-c) = 0{,}668$

Propiedad simetria

$\Phi(c) - [1 - \Phi(c)] = 0{,}668$

$2\Phi(c) - 1 = 0{,}668$

$\Phi(c) = \frac{1{,}668}{2}$ $\boxed{c = 0{,}97}$

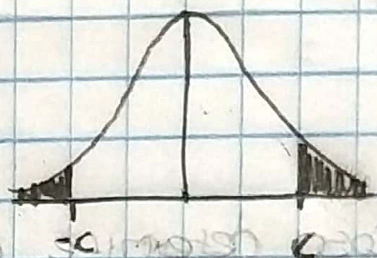
$\Phi(c) = 0{,}834$

$\Phi(0{,}97) = 0{,}834$

E) $P(c \leq |Z|) = 0{,}016$

$|Z| \geq c$

$Z \geq c \ \vee \ Z \leq -c$



Simetria

$2[P Z \geq c]$

$2[P(Z \geq c)] = 0{,}016$

$2[1 - P(Z \leq c)] = 0{,}016$

$[1 - P(Z \leq c)] = 0{,}008$

$P(Z \leq c) = 0{,}992$

$\Phi(c) = 0{,}992$

$\Phi(2{,}4) = 0{,}992$

$\boxed{c = 2{,}4}$

2. Suponga que el diametro, a una altura de 1,5 mt (en pulgadas), de cierto tipo de árbol, esta normalmente distribuido con $\mu = 8{,}8$ y $\sigma = 2{,}8$

a) ¿Cual es la probabilidad de que el diametro de un arbol seleccionado al azar a la suma se de 10 pulgadas ¿Que por lo menos sea de 10?

X = Diametro de arbol a 1,5 mts

$X \sim N(8{,}8, (2{,}8)^2)$

• $P(X \leq 10)$

Estandarizamos

$Z\left(\frac{10 - 8{,}8}{2{,}8}\right)$

$\Phi(0{,}4285)$

$\Phi(0{,}43) = \boxed{0{,}6664}$

• $P(X \geq 10)$

$1 - P(X \leq 10)$

Estandarizamos

$1 - \Phi(0{,}43)$

$1 - 0{,}6664 = \boxed{0{,}3336}$

La Probabilidad que el diametro de un arbol sea por mucho 10 pulgadas es de 66,64% y de que por lo menos sea de 10 pulgadas es de 33,36%

b) Cuál es la probabilidad de que el diametro de un arbol Seleccionad al azar sea mas de 20 Plg?

$P(X \geq 20)$

$1 - P(X \leq 20)$

Estandarizamos

$\left(\frac{20 - 8{,}8}{2{,}8}\right)$

$1 - \Phi(4)$

$1 - 0{,}999968 = 0{,}000032 \approx \boxed{0}$

La Probabilidad de que el diametro de un arbol sea mas de 20 Plg es casi nula

c) Cual es la Probabilidad de que el diametro de un arbol seleccionado al azar sea entre 5 y 10 plg?

$P(5 \leq X \leq 10)$

$P(X \leq 10) - P(X \leq 5)$

Estandarizamos

$\Phi(0{,}43) - \Phi(-1{,}36)$

Aplicamos Propiedades

$\Phi(0{,}43) - [1 - \Phi(1{,}36)]$

$\Phi(0{,}43) + \Phi(1{,}36) - 1$

$0{,}6664 + 0{,}9130 - 1$

$= \boxed{0{,}5794}$

$\left\{ \frac{5 - 8{,}8}{2{,}8} = -1{,}36 \right.$

La Probabilida de que el diametro este entre 5 y 10 Plg es de 57,94%

Scanned by CamScanner

d) ¿Que valor c es tal que el intervalo (8,8-c, 8,8+c) incluya el 98% de todos los valores del diametro

$P(8,8-c \leq X \leq 8,8+c) = 0,98$

Estandarizacion

$\Phi\left(\frac{8,8+c-8,8}{2,8}\right) - \Phi\left(\frac{8,8-c-8,8}{2,8}\right)$

$\Phi\left(\frac{c}{2,8}\right) - \Phi\left(\frac{-c}{2,8}\right)$

$K = c/2,8$

$\Phi(K) - \Phi(-K)$

Propiedades

$2\Phi(K) - 1 = 0,98$

$\Phi(K) = 1,98/2$

$\Phi(K) = 0,99$

$\Phi(2,32) = 0,99$

$K = 2,32$, $c = (2,32)(2,8)$

$\boxed{c = 6,496}$

El valor c que hace que el intervalo dado incluya el 98% de los valores del diametro es 6,496

3. Hay dos máquinas disponibles para cortar corchos para usarse en botellas de vino. La primera produce corchos con diametros que están normalmente distribuidos con media de 3 cm y desviacion estandar de 0,1 cm. La segunda máquina produce corchos con diametros que tiene una distribucion normal con media 3,04 cm y desviacion estandar de 0,08 cm. Los corchos aceptable tiene diametro entre 2,9 y 3,1 cm ¿cual maquina es más probable que produzca un corcho aceptable

A = Maquina uno

$A \sim N(3, (0,1)^2)$

$P(2,9 \leq A \leq 3,1)$

$\Phi_A\left(\frac{3,1-3}{0,1}\right) - \Phi_A\left(\frac{2,9-3}{0,1}\right)$

$\Phi_A(1) - \Phi_A(-1)$

B = Maquina Dos

$B \sim N(3,04, (0,08)^2)$

$P(2,9 \leq B \leq 3,1)$

$\Phi_B\left(\frac{3,1-3,04}{0,08}\right) - \Phi_B\left(\frac{2,9-3,04}{0,08}\right)$

$\Phi_B(0,75) - \Phi_B(-1,75)$

$\Phi_A(1) - [1 - \Phi_A(1)]$

$2\,\Phi_A(1) - 1$

$2\,(0,8413) - 1$

$0,6826$

$\Phi_B(0,75) + \Phi_B(1,75) - 1$

$0,7733 + 0,9599 - 1$

$0,7332$ ✓

Es probable que la maquina 2 produzca un corcho aceptable ya que tiene 73,32% de probabilidad mientras que la maquina 1 solo tiene el 68,26%

4. Suponga que el 10% de todas las flechas de acero producidas para "Game of thrones" no cumplen las especificaciones del director. Consider una muestra de 200 flechas y se X el número entre éstos que no cumplen con las especificaciones.

a) Cual es la probabilidad aproximada de que X sea cuando mucho 30?

APRO. NORMAL DE LA BINOMIAL

X = # flechas que no cumplen

$X \sim Bin(200, 0.1)$

$np = 200 \cdot 0,1 = 20 \geq 10$ ✓

$n(1-p) = 200(0,9) = 180 \geq 10$ ✓

$P(X \leq 30)$

$X \overset{Aprox}{\sim} N(20, 18)$

$P(X \leq 30)$

Estandarizamos

$\Phi\left(\frac{30-20+0,5}{\sqrt{18}}\right)$

$\Phi(2,47) = \boxed{0,9932}$

La probabilidad aproximada de que cuando mucho 30 flechas no cumplan es de ~99,32%

Scanned by CamScanner

b) Cual es la probabilidad aproximada de que X sea menos que 30?

$P(X<30) = P(X \leq 29)$ Por ser VAD

Aproximacion

$X \overset{Aprox}{\sim} N(20, 18)$

$\Phi\left(\frac{29-20+0,5}{\sqrt{18}}\right)$

$\Phi(2,24) = \boxed{0,987}$

La probabilidad de que hayan menos de 30 flechas que no cumplen es de 98,7 %

c) Cual es la probabilidad aproximada de que X este entre 15 y 25 (inclusive)?

$P(15 \leq X \leq 25)$

Aproximacion

$X \overset{Aprox}{\sim} N(20, 18)$

$\Phi\left(\frac{25-20+0,5}{\sqrt{18}}\right) - \Phi\left(\frac{15-20-0,5}{\sqrt{18}}\right)$

$\Phi(1,3) - \Phi(-1,3)$

$2\Phi(1,3) - 1$

$(2[0,9032]) - 1$

$= \boxed{0,8064}$

La probabilidad de que hayan entre 15 y 15 flechas que no cumplen es de 80,64 %

---

33) Se sabe por experiencia que el 20% de los libros de texto vendidos por una empresa, tienen problemas de encuadernacion. Se seleccionan aleatoriamente 15 libros de dicha empresa. La probabilidad de que mas de 13 no tengan problemas de encuadernacion es

X = # de cuadernos con problemas

$P(X<2)$ Distribucion Binomial

$P(X<2) = P(X \leq 1)$

$\binom{n}{x}(p)^x(1-p)^{n-x}$

$\sum_{n=0}^{1}\binom{15}{x}(0,2)^x(0,8)^{n-x}$

$= P(0) + P(1)$

$= \boxed{0,1671}$

La probabilidad de que mas de 13 no tengan problemas de acomodacion es de 16,71%

(34) El numero de llamadas que llegan a una central es una variable aleatoria Poisson, con un promedio de 20 llamadas cada 10 minutos. Si se desea que en un intervalo de t ~~de~~ minutos no lleguen llamadas en el 50% de los casos la longitud del intervalo es

X = # llamadas en tiempo minutos

$X \sim Poiss(2)$

T = tiempo entre llamadas

$T \sim Exp(2)$

$P(T \leq t) = 0,5$

$1 - e^{-2t} = 0,5$

$\lambda = 20/10 = 2$

Aprox. Exp de la D. Poisson

$0,5 = e^{-2t}$

$Ln(0,5) = -2t$

$t = \frac{-Ln(0,5)}{2}$

$t = 0,3465$ minutos

20,79 seg

$\boxed{21 \text{ seg}}$

(35) La dureza Rocwell de cierto metal es una variable aleatoria aproximadamente normal con media 70 y desviacion estandar 3. El rango de dureza aceptable es (70 - c, 70 + c), si se desea que el 95% de las pieza de dicho metal sean aceptable, el valor de c que lo garantiza es

Distribucion Normal

X = Dureza de cierto Metal

$X \sim N(70, (3)^2)$

$P(70 - c \leq X \leq 70 + c) = 0{,}95$

Estandarizamos

$$\Phi\left(\frac{70+c-70}{3}\right) - \Phi\left(\frac{70-c-70}{3}\right)$$

$$\Phi\left(\frac{c}{3}\right) - \Phi\left(\frac{-c}{3}\right) = 0{,}95$$

$K = c/3$

$\Phi(K) - \Phi(-K) = 0{,}95$

Propiedades

$2\Phi(K) - 1 = 0{,}95$

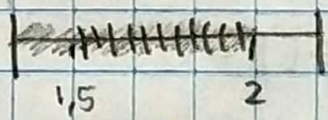
$\Phi(K) = 0{,}975$

$\Phi(1{,}96) = 0{,}975$

$K = 1{,}96$; $c = (1{,}96)(3)$

$\boxed{c = 5{,}88}$

(36) El tiempo entre llamadas que llegan a una central es una variable aleatoria Exponencial, con un tiempo promedio entre llamadas de 1,2 min. Si han transcurrido 90 segundos sin que llegue la siguiente llamada, la probabilidad de que la llamada llegue antes de 2 minutos es



X: tiempo entre llamadas

Distribucion Exponencial

$X \sim Exp(\lambda)$, $\lambda = 1/1{,}2 = 0{,}833$

$$P(X \leq 2 \mid X \geq 1{,}5) = \frac{P(1{,}5 \leq X \leq 2)}{P(X \geq 1{,}5)} = \frac{X(2) - X(1{,}5)}{1 - X(1{,}5)}$$

$$= \frac{1 - e^{-0{,}83(2)} - \left[1 - e^{-0{,}83(1{,}5)}\right]}{1 - \left[1 - e^{-0{,}83(1{,}5)}\right]} = \frac{e^{-0{,}83(1{,}5)} - e^{-0{,}83(2)}}{e^{-0{,}83(1{,}5)}}$$

$= \boxed{0{,}34}$

La probabilidad de que la llamada llegue antes de 2 minutos transcurrido 90 segundos es de 34%

(37) La resistencia a la compresion de una serie de muestras de cemento puede modelarse por medio de una distribucion normal, con una resistencia media de 6000kg y una desviacion estandar de 100kg por cm^2. Si se seleccionan aleatoriamente 4 muestras de cemento, la probabilidad de que los cuatro tengan una resistencia inferior a 5950 kg/cm^2 es

Distribucion Normal

X = Resistencia

$X \sim (6000, (100)^2)$

$P(X \leq 5950)$

Estandarizamos

$\Phi\left(\frac{5950-6000}{100}\right)$

$\Phi(-0,5)$

$1-\Phi(0,5)$

$1-0,6914 = 0,3086$

Distribucion Binomial

Y = Muestras con resisten inferio a 5950

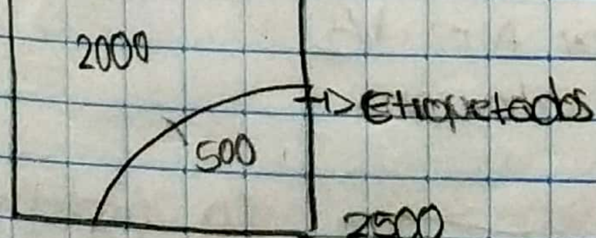
$Y \sim bin(4, (0.3086))$

$\binom{n}{x} (p)^x (1-p)^{n-x}$

$\binom{4}{4} (0,3086)^4 (1-0,3086)^0$

$= \boxed{0,0091}$

(38) De una poblacion de 2500 animales se capturaron y etiquetaron 500 y luego fuero liberados. Despue de cierto tiempo se escogen al azar 5 animales de la poblacion. La probabilidad aproximada de que en la muestra haya a lo mas 2 de los 5 animales etiquetados



X = Animales etiquetado en la muestra

$X \sim Hiper(5, 500, 2500)$
$\quad\quad\quad\quad n \quad M \quad N$

$n < 5\% N$

$5 < 0,05(2500)$

$5 < 125$

$$P = \frac{M}{N} = \frac{500}{2500} = \frac{1}{5}$$

Aproximación Binomial de la hiper

$X \overset{Aprox}{\sim} Bin(5, 1/5)$

$$P(X \leq 2) = \sum_{n=0}^{2} \binom{5}{x} (1/5)^x (1-p)^{5-x}$$

$$= \boxed{0,942}$$

La probabilidad de que en los 5 animales de muestra hayan por lo menos 2 etiquetados es aproximadamente 94,21%

(39) Se selecciona al azar seis bebedores de frescos de cola. A cada uno se le sirve un vaso de fresco de cola tipo **A** y otro fresco de cola tipo **B**. Los vasos son idénticos Excepto por un código que está en el fondo del vaso para identificar el tipo de cola. Suponga que no existe preferencia por los bebedores para los dos tipos de cola. La probabilidad de que exactamente 3 de los seis prefiera el fresco de cola tipo A

X: Bebedores que prefieren el fresco A

$X \sim Bin(n, p)$

Distribución Binomial

P: Probabilidad de gustar A = 1/2

$P(X=3)$

$$\binom{6}{3} (0,5)^3 (1-0,5)^3 = \boxed{0,313}$$

La probabilidad de que exactamente 3 de los seis prefiera fresco de cola tipo A es 31,3%

(40) El numero de errores cometidos por un operario de un dia es una variable aleatoria Poisson. Si en el 80% de los casos no comete error la probabilidad que cometa a lo mas 2 es:

Distribucion Poisson

X = Errores en un dia

$X \sim Poiss(\lambda)$

$\lambda = 0,2$

$P(X \leq 2)$

$$\sum_{x=0}^{2} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{x}}{x!} = \boxed{0,9988}$$

0,9984

La probabilidad que cometa a lo mas 2 errores es 99,88%

(41) Suponga que el tiempo de respuesta X en un terminal de computadora en linea, es una variable aleatoria exponencial con un tiempo medio de respuesta de 5seg. La probabilidad de que el tiempo de respuesta sea cuando mucho 10 seg es

Distribucion ~~Poisson~~ Exponencial

$X \sim Exp(\lambda)$

$\lambda = 1/5$

$P(X \leq 10)$

$1 - e^{-(1/5)(10)}$

$P(X \leq 10) = \boxed{0,865}$

la probabilidad de que el tiempo de respuesta sea cuando mucho 10 seg es de 86,5%

(42) El tiempo requerido por un conductor para reaccionar a las luces de frenos de un vehiculo delante de el, es una variable aleatoria aproximadamente normal con un tiempo medio de 1,25 y una desviacion estandar de 0,46 seg. La proporcion de conductores

que reaccionarán en menos de 1,3 seg después de que el conductor de adelante active sus luces de frenos es

$\mu = 1,25$ X = tiempo de reacción Distribución Normal

$\sigma = 0,46$ seg

$P(X \leq 1,3)$
Estandarizando

$$\Phi\left(\frac{1,3 - 1,25}{0,46}\right)$$

$\Phi(0,11) = 0,5438$

(13) Suponga que en promedio llegan seis pulsos por minuto a un contador. La probabilidad de que en 30 segundos se reciban al menos un pulso

$$\frac{6 \text{ Pulsos}}{60 \text{ Segundos}} = 0,1 \qquad 0,1 \times 30 = 3 = \lambda$$

Distribución Poisson

X = # de pulsos en 30 seg

$X \sim Pois(3)$

$P(X \geq 1)$ usamos complemento

$1 - P(X < 1) = 1 - P(0)$

$$1 - \left[\frac{e^{-3}\,3^0}{0!}\right]$$

$1 - 0,05 = \boxed{0,95}$

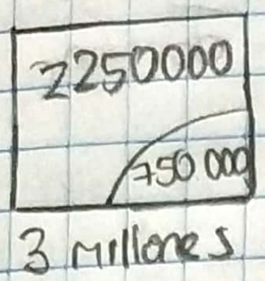
La probabilidad de que en 30 seg se reciba al menos un pulso es de 95%

(14) Se reporta que de casi 3 millones de tanques de almacenamiento de productos de gasolina enterrados 1 de cada 4 tiene fugas. Suponga que se examinan aleatoriamente 300 de esos tanques

La probabilidad aproximada de que a lo sumo 60 de los examinados tengan fuga de gas

Dis.

X = # tanques con fuga Hipergeométrica



$X \sim Hip(300, 750.000, 3\text{ millones})$
$\qquad\quad n \qquad M \qquad N$

$n < 5\% N$ ✓
$300 < 150.000$ ✓

$P = \frac{M}{N} = \frac{1}{4}$

Aprox. Binomial

Aproximación a Binomial

$X \overset{Aprox}{\sim} Bin(300, 1/4)$

$nP = 75 > 10$ ✓
$n(1-P) = 225 > 10$ ✓

Aproximación a Normal

Aprox. Normal

$\mu = 75 \qquad \sigma^2 = 56,25$

$X \overset{Aprox}{\sim} N(75, 56,25)$

$P(X \leq 60)$

Estandarizamos Estandarización

$\Phi\left(\frac{60-75+0,5}{\sqrt{56,25}}\right)$

$\Phi(-1,93)$

Propiedades

$1 - \Phi(1,93)$
$1 - 0,9732 = 0,0268$

La probabilidad de que a lo mucho 60 de los 60 examinado tengan fugas de gas es de 2,68%

// // // //

TALLER 8

1. El tiempo entre un robo y otro en un día de la semana en "Punto cero uno" es una variable aleatoria con distribución exponencial. En promedio ocurre un robo cada 30 minutos.

Dis. Exponencial

a) Calcule la probabilidad de que el siguiente robo ocurra después de 40 min

X = Tiempo entre robos $\quad E[X] = 30 = \frac{1}{\lambda} \quad \lambda = \frac{1}{30}$

$P(X \geq 40)$??

$X \sim Exp(1/30)$

$1 - P(X \leq 40)$

$1 - \left[1 - e^{-\frac{1}{30}(40)}\right]$

$e^{-\frac{40}{30}} = \boxed{0{,}2635}$

La probabilidad de que el siguiente robo ocurra después de 40 minuto es de 26,35 %

b) Calcule la probabilidad de que el siguiente robo ocurra entre 15 y 18 min

$P(15 \leq X \leq 18)$

$1 - e^{-\frac{18}{30}} - \left[1 - e^{-\frac{15}{30}}\right]$

$1 - e^{-3/5} - 1 + e^{-1/2}$

$e^{-1/2} - e^{-3/5}$

$\boxed{0{,}0577}$

La probabilidad de que el siguiente robo ocurra entre 15 y 18 min es de 5,8 %

c) Si han pasado 40 min, sin que haya pasado un robo, calcule la probabilidad de que este ocurra antes de los 60 min.

Propiedad Carencia de memoria

$P(X < t_0 + t_1 \mid X \geq t_0) = P(X \leq t_1)$

$P(X < 60 \mid X \geq 40)$

$P(X < 40 + 20 \mid X \geq 40)$

$P(X \leq 20)$

$1 - e^{-\frac{20}{30}}$

$1 - e^{-2/3}$

$\boxed{0{,}48}$

La probabilidad de que ocurra un un robo antes de 60 min dado que han pasado 40 min, es de 48%

Scanned by CamScanner

2. El Servicio de buses "Conativa.2.0" se enorgullece sobre la calidad en su servicio y afirmar que el tiempo entre llegada de buses a un paradero un sábado en la tarde, (en Minutos) es una V.a Exponencial con un tiempo medio de 13 minutos.

Dis. Exponencial

a) Halle el valor de $E[x^2]$

$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$

$13^2 = E[X^2] - [13]^2$

$13^2 + 13^2 = E[X^2]$

$2(13^2) = E[X^2]$

$\boxed{E[X^2] = 338}$

$E[X] = \frac{1}{\lambda} = 13 = \lambda = \frac{1}{13}$

$Var[X] = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\frac{1}{(13)^2}}$

$Var[X] = 13^2$

b) Calcule el tiempo K por encima del cual llega el 10 % de los buses.

$P(X \geq K) = 0,1$

$1 - P(X \leq K) = 0,9$

$1 - e^{-K/13} = 0,9$

$0,1 = e^{-K/13}$

$Log(0,1) = -K/13$

$K = Log(0,1) \cdot (-13)$

$\boxed{K = 29,93}$ Minutos

c) Calcule el Percentil 50.

$P(X \leq \tilde{X}) = 0,5$

$1 - e^{-\tilde{X}/13} = 0,5$

$0.5 = e^{-\tilde{X}/13}$

$Ln(0,5) = -\tilde{X}/13$

$\tilde{X} = (-13)\, Ln(0,5)$

$\boxed{\tilde{X} = 9,01 \text{ Minutos}}$

Scanned by CamScanner

d) Calcule la probabilidad de que el tiempo de llegada de un bus sea superior a una hora y cuarto

60 min + 15 min = 75 min

$P(X \geq 75)$

$1 - P(X \leq 75)$

$1 - [1 - e^{-75/13}]$

$e^{-75/13}$

=

0,00312

=

La Probabilidad es bastante baja.

3. El tiempo entre entrega de domicilios de un nuevo restaurante en Carlos E. es una v.a. exponencial con un tiempo medio de 15 minutos. El pequeño dueño quiere ver si vale la pena este servicio por lo tanto él desea calcular la probabilidad de tener que hacer más de 3 domicilios en una hora. ¿cuál sería su recomendación?

Relacion Dis Exp. Dis Poisson

X: tiempo entre domicilios

$X \sim Exp(1/15)$

$E[X] = 15 = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 1/15$

Y = Domicilios en una hora

$Y \sim Poiss(4)$

$\frac{1 \text{ Domicilio}}{15 \text{ min}} \cdot \left(\frac{60 \text{ min}}{1 h}\right) = \frac{4 \text{ Domicilios}}{h}$

$P(Y > 3)$

$1 - P(Y \leq 3)$

f.d.a $\frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{x}}{x!}$

$1 - P(Y \leq 3) = 1 - [P(0) + P(1) + P(2) + P(3)] = \boxed{0,5665}$

La probabilidad de hacer más de 3 domicilios en 1 hora es de 56,65 %

4. Sea X el tiempo en años que transcurre después de realizar una operación de alto riesgo es una v.a que distribuye Lognormal con $\mu = 2.32$ y $\sigma = 0.2$

Scanned by CamScanner

a) Sea $\tilde{X}$ la mediana del tiempo de vida luego de la cirugia halle el valor para la mediana.

$$\tilde{X} = e^{\mu} = e^{2,32} = 10,17$$

b) Halle $E[X]$ y $Var[X]$

$$E[X] = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \quad ; \quad Var = e^{2\mu + \sigma^2} \cdot (e^{\sigma^2} - 1)$$

$$= e^{2.32 + \frac{(0.2)^2}{2}} \qquad = e^{2(2,32) + (0,2)^2} \cdot (e^{(0,2)^2} - 1)$$

$$\boxed{E[X] = 10,38} \quad ; \quad \boxed{Var[X] = 4,3981}$$

---

(45) El tiempo que transcurre entre cortes de un hilo de amianto en su produccion, es una variable aleatoria exponencial de media 20 minutos. La produccion de este hilo se realiza a una velocidad de $\frac{15 \text{ mts}}{\text{minuto}}$, y un rollo completo de este hilo debe tener una longitud de 500 mts. La probabilidad de que un rollo de hilo tenga al menos una atadura (es decir, un empate debido a la ocurrencia de un corte hilo) es:

X = Tiempo entre cortes $\quad E[X] = 20 = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{20 \text{ min}}$

$V = \frac{x}{t} \Rightarrow t = \frac{x}{V} = \frac{500}{15} = \frac{100}{3}$ tiempo que se demora en todo el rollo

Entonces en $\frac{100}{3}$ min cuantos cortes hay?

Dis. Exponencial

$$\frac{100}{3} \cdot \frac{1}{20} = \frac{5 \text{ cortes}}{3 \text{ minutos}}$$

Y = Ataduras en un rollo

$Y \sim Poiss(5/3)$

Scanned by CamScanner

$P(Y \geq 1)$

$1 - P(Y<1) = 1 - P(Y=0)$

$= 1 - \frac{e^{-5/3}(5/3)^{0}}{0!}$

$\boxed{= 0,81}$

La probabilidad de que en un rollo tenga al menos una atadura es de 81,1 %

(46) Una urna contiene 20 fichas: la mitad rojas y la otra mitad azules. Podemos decir que:

(A) A la larga el número de fichas rojas obtenidas en una muestra aleatoria con remplazo de tamaño 8 será igual al número esperado de fichas rojas obtenidas de una muestra aleatoria sin remplazo del mismo tamaño

(47) La lectura de temperatura tomada con un termopar colocado en un medio a temperatura constante se puede modelar con una distribución normal con media μ y desviación estándar σ. El valor de σ que permite que en el 95% de los casos la temperatura esté a menos de 0,1 grados de su media es

Dis Normal

$P(\mu - 0{,}1 \leq X \leq \mu + 0{,}1)$

$\Phi\left(\frac{\mu + 0{,}1 - \mu}{\sigma}\right) - \left(\frac{\mu - 0{,}1 - \mu}{\sigma}\right) = 0{,}95$

$\Phi\left(\frac{0{,}1}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{0{,}1}{\sigma}\right) = 0{,}95$

$\frac{0{,}1}{\sigma} = w$

$\Phi(w) - \Phi(-w) = 0{,}95$

$\Phi - [1 - \Phi(w)] = 0{,}95$

$2\Phi(w) - 1 = 0{,}95$

$\Phi(w) = 0{,}975$

$w = 1{,}96$

$$\sigma = \frac{0.1}{1,96} = \boxed{0,051}$$

48) Las tasas de desempleo en cierta ciudad es del 5%. Se seleccionan al azar 5000 personas de dicha ciudad. La probabilidad de encontrar entre 210 y 275 desempleados inclusive

X = # de desempleados en la ciudad

$X \sim bin(n, p)$ $n = 5000$ $p = 0,05$

$n \cdot p \geq 10 \Rightarrow 250 \geq 10$

$n(1-p) \geq \Rightarrow 4750 \geq 10$

Podemos aproximar con la Normal

$E[X] = 250$

$Var[X] = n \cdot p(1-p) = 237,5$

$Z \overset{Apox}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ $\mu = 250$ $\sigma^2 = 237,5$

Distribución Binomial

$P(210 \leq Z \leq 275)$ Estandarizamos

$$\Phi\left(\frac{275 + 1/2 - 250}{\sqrt{237,5}}\right) - \Phi\left(\frac{210 - 1/2 - 250}{\sqrt{237,5}}\right)$$

$\Phi(1,65) - \Phi(-2,63) =$ $\boxed{0,94626}$

$\Phi(1,65) + \Phi(2,63) - 1$

$0,950529 + 0,99573 - 1$

La probabilidad de encontrar entre 210 y 275 desempleados es de 94,62%

49) Un artículo de los Ángeles Times reportó que una de cada 200 personas portan el gen hereditario que provoca cáncer de colon. Si se toma una muestra de 1000 individuos. la probabilidad aproximada de que exactamente 5 porten el gen es:

X = # individuos con el gen

Aproximación Binomial de la Hipergeométrica

$X \overset{Aprox}{\sim} Bin(n, P)$ $n = 1000$
$P = 1/2$

La probabilidad aproximada de 5 porten el gen es de 17,5%

$P(X=5)$

$\binom{1000}{5}\left(\frac{1}{200}\right)^5 \left(1-1/200\right)^{995} = \boxed{0,175}$

(90) La Probabilidad de que los vehículos que provienen del Sur y entren a un cruce vehicular den vuelta a la izquierda, a la derecha o sigan de frente, es la misma. Si 500 vehículos llegan al cruce vehicular, la probabilidad de que 150 o menos den vuelta a la derecha es

Aprox Normal de la Binomial

$I = 1/3$
$D = 1/3$
$F = 1/3$

X = # vehículos que giran a la derecha

$X \sim bin(n, P)$ $n = 500$
$P = 1/3$

$E[X] = n \cdot P = 166,67$
$Var[X] = n \cdot P(1-P) = 111,11$

$n \cdot P \geq 10$
$166,66 \geq 10$ ✓

$n(1-P) \geq 10$
$333,33 \geq 10$ ✓

Aproximamos con la D. Normal

$P(Z \leq 150)$

$\Phi\left(\frac{150 + 1/2 - 166,67}{\sqrt{111,11}}\right)$

$\Phi(-1,53)$

$1 - \Phi(1,53)$

$1 - 0,936992$

$\boxed{0,06301}$

La Probabilidad de que menos de 150 vehículos giren a la derecha es de 6,301%

51) Se sabe por experiencia que el 20% de los libros de texto vendidos por una empresa, tienen problemas de encuadernacion. Se seleccionan aleatoriamente 15 libros de dicha empresa. La probabilidad de que exactamente 8 tengan problemas de encuadernacion es:

X = # libros con problemas

Distribucion Binomial

$Bin \sim (n, p)$ $\quad n = 15$

$p = 0,2$

$$\binom{15}{8} (0,2)^8 (1-0,2)^7 = 3,4547 \times 10^{-3}$$
$$= \boxed{0,0034547}$$

52) Si los puntajes de un test de inteligencia están normalmente distribuidos con $\mu = 110$ y $\sigma = 10$. ¿cual es la probabilidad de que una persona escogida al azar, tenga un puntaje mayor a 100 puntos

Distribucion Normal

X = Puntaje en la prueba

$P(X > 100)$

$1 - P(X \leq 100)$

Estandarizamos

$$1 - \Phi\left(\frac{100 - 110}{10}\right)$$

$1 - \Phi(-1)$

$1 - [1 - \Phi(1)]$

$\Phi(1) = \boxed{0,8413}$

La probabilidad de que una persona escogida al aza tenga un puntaje mayo a 100 puntos es 84,13%

53) De una poblacion de animales se capturaron y etiquetaron 5 y luego fueron liberados. Después de cierto tiempo se escogen al azar 10 animales de la poblacion, la cual está constituida por 25 animales. La probabilidad de que en la muestra haya a lo mas dos de los 5 animales etiquetados es:

X = # Animales etiquetados en la muestra

$X \sim Hiper(n, M, N)$ $N = 25$ Dis. hipergeometrica

$M = 5$

$n = 10$

$P(X \leq 2)$

$$\sum_{x=0}^{2} \frac{\binom{5}{x}\binom{20}{10-x}}{\binom{25}{10}} = P(0) + P(1) + P(2) = \boxed{0,699}$$

La probabilidad de que en la muestra haya a lo mas 2 de los 5 etiquetados es 69,9%

(54) A una evaluacion se han presentado un número determinado de personas. El 40,13% obtuvo notas inferiores al 2,5 y el 30,85% notas superiores a 4.0. Asumiendo que las notas obtenidas se distribuyen normalmente, la media y la desviacion estandar poblacionales son:

Dis. Normal

$P(X \leq 2{,}5) = 0{,}4013$

$\Phi\left(\frac{2{,}5 - M}{\sigma}\right) = 0{,}4013$

$1 - \Phi\left(-\left(\frac{2{,}5 - M}{\sigma}\right)\right) = 0{,}4013$

$\Phi\left(-\left(\frac{2{,}5 - M}{\sigma}\right)\right) = 0{,}5987$

$\Phi(K) = 0{,}5987$

$\Phi(-0{,}25) = 0{,}5987$

$K = \frac{2{,}5 - M(-1)}{\sigma}$

$-0{,}25 = \frac{2{,}5 - M}{\sigma}$ (1)

$P(X \geq 4.0) = 0{,}3085$

$1 - P(X \leq 4) = 0{,}3085$

$1 - P(X \leq 4) = 0{,}3085$

$P(X \leq 4) = 0{,}6915$

$\Phi\left(\frac{4 - M}{\sigma}\right) = 0{,}6915$

$\Phi(W) = 0{,}6915$

Scanned by CamScanner

$\Phi(0{,}5) = 0{,}6915$

$w = 0{,}5$

$0{,}5 = \frac{4-\mu}{\sigma}$ (2)

Ahora encontramos μ y σ con (1) y (2)

$\frac{\sigma}{4} = \mu - 2{,}5$

$\frac{\sigma}{4} - \mu = -2{,}5$ (1)

$+$

$\frac{\sigma}{2} + \mu = 4$ (2)

$\frac{3\sigma}{4} = \frac{3}{2}$

$\boxed{\sigma = 2}$

$1 + \mu = 4$

$\boxed{\mu = 3}$

25) Supenga que sólo el 75% de los conductores en cierta ciudad usan el cinturon de seguridad todo el tiempo. Si se selecciona una muestra de 500 conductores, la probabilidad aproximada de que entre 360 y 400 (inclusivos) usen el cinturon todo el tiempo es

Aproximacion Normal de la Binomial

X = # conductores que usan el cinturon

$X \sim Bin(500, 0{,}75)$

$np > 10 \quad 375 > 10$

$n(1-p) > 10 \quad 125 > 10$

Aproximacion a la Normal

$E[X] = 375 = np$

$Var[X] = np(1-p) = 93{,}75$

$X \overset{Aprox}{\sim} N[\mu, \sigma)$ $\quad \mu = 375$

$\sigma = \sqrt{93{,}75}$

$P(360 \leq X \leq 400)$

$\Phi\left(\frac{400-375+1/2}{\sqrt{93{,}75}}\right) - \Phi\left(\frac{360-375-1/2}{\sqrt{93{,}75}}\right)$

$\Phi(2{,}63) - \Phi(-1{,}60)$

$\Phi(2{,}63) + \Phi(1{,}60) - 1$

$0{,}99531 + 0{,}94201 - 1$

$\boxed{0{,}9409}$

La probabilidad de que $P(360 \leq X \leq 400)$ es de 94,09 %

56) Las estaturas de los estudiantes de estadística se distribuyen normalmente con media 1,65M y desviación estándar 0,05M. La altura en metros que separa al 97,72 % más bajo del 2,28 % más alto es: 1

Dis. Normal

$P(X \leq K) = 0,9772$

$\Phi\left(\dfrac{K-1,65}{0,05M}\right) = 0,9772$

$\Phi(W_i) = 0,9772$

$\Phi(2) = 0,9772$

$W = 2$

$2 = \dfrac{K-1,65}{0,05}$ Altura $\boxed{1,75}$

57) El número de llamadas que llegan a una central cada dos minutos es una V.A Poisson, con 4 llamadas en promedio cada dos minutos. Si llega una llamada, la probabilidad de que la siguiente llegue antes de 30 segundos

Relación Poisson - Exponencial

X = Llamadas que llegan

$X \sim Poiss(\lambda)$ $\lambda = \dfrac{4 \text{ llamadas}}{2 \text{ minuto}}$ $\lambda = 2$

T = Tiempo entre llamada

$T \sim EXP(\lambda)$ $\lambda = \dfrac{2 \text{ llamadas}}{1 \text{ minuto}} = \dfrac{1 \text{ llamada}}{30 \text{ seg}}$

$\lambda = 1/30$

$P(X \leq 60 \mid X \geq 30) = P(X \leq 30)$

$1 - e^{-\lambda x} = 1 - e^{-\frac{1}{30}(30)}$

$= 1 - e^{-1} = \boxed{0,6321}$

La probabilidad de que llegue una llamada antes de los 30 seg

(58) Un examen consta de 6 preguntas, cada una con 4 posibles respuestas, de la cuales solo una es correcta. El examen se aprueba al responder de manera correcta al menos 4 preguntas. Si una persona adivina las respuestas, la probabilidad de que saque menos de 2,5 es

1
2
3
4
5
6

$5/6 = 0{,}833$

$6 \to 5$
$x \to 2{,}5$

$x = \dfrac{6 \cdot 2{,}5}{5}$

$x = \boxed{3}$

Que saque 2,5 es equivalente a que responda 3 preguntas

X = # de respuestas acertadas $\quad X \sim Bin(n,p)$

$n = 6$
$p = 1/4$

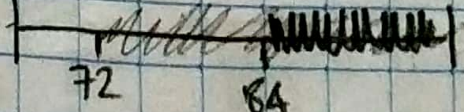
$P(X<3) = P(X\leq 2)$

$$\sum_{x=0}^{2} \binom{6}{x} \left(\tfrac{1}{4}\right)^{x} \left(1-\tfrac{1}{4}\right)^{n-x} = \boxed{0{,}8306}$$

Adivinando respuesta tiene el 83,06 de sacar 2,5

(59) Se supone que los resultados de un examen siguen una distribución normal con media 78 y varianza 36. Si se sabe que la calificación de un estudiante es mayor que 72, la probabilidad de que su calificación sea, de hecho superior a 84 es:

$$P(X\geq 84 \mid X\geq 72) = \frac{P(X\geq 84) \wedge P(X\geq 72)}{P(X\geq 72)}$$



$$= \frac{P(X\geq 84)}{P(X\geq 72)} = \frac{1-P(X<84)}{1-P(X\leq 72)}$$

$$1-\Phi\left(\frac{72-78}{6}\right) \qquad 1-\Phi(-1)$$

$$= \frac{1-0.841345}{1-[1-\Phi(1)]} = \frac{0.158655}{\Phi(1)} = \frac{0.158655}{0.841345} = \boxed{0.1886}$$

La probabilidad de que la nota de un estudiante sea mayor a 84 dado que su nota es superior a 72 es de 18,86%

60) Considere la variable aleatoria X la cual representa el # de criaturas capturadas en cierta trampa durante determinado tiempo. Si se asume que X es una VA Poisson, con un promedio de 4,5 criaturas por unidad de tiempo, la probabilidad de que exactamente se capturen cinco criaturas

$X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ $\lambda = 4.5$

$P(X=5)$

$$\frac{e^{-4.5}(4.5)^5}{5!} = \boxed{0.1708}$$

61) El logaritmo de la potencia mediana por hora de señales de radio (en decibeles) transmitidas entre dos ciudades, es una VA normal con media 3,5 y desviación estándar σ, desconocida. Si la potencia mediana esperada para esta señal, es de 90 decibeles, el valor de σ es;

$E[X] = 90 = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$ $\mu = 3,5$

Scanned by CamScanner

$$90 = e^{3,5 + \frac{\sigma^2}{2}}$$

$$\ln(90) = 3,5 + \frac{\sigma^2}{2}$$

$$2[\ln(90) - 3,5] = \sigma^2$$

$$\sigma = \sqrt{2(\ln(90) - 3,5)}$$

$$\sigma = 1,41$$

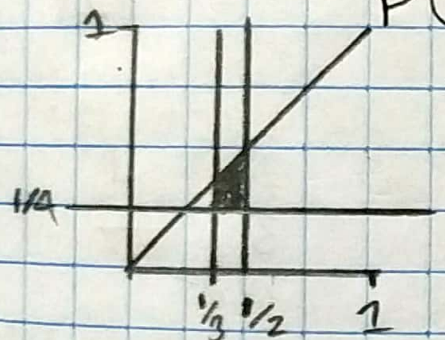
TALLER ⑨

1. Sean X y Y variables aleatorias con distribución conjunta dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 8xy & ; 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0 & ; e.o.c \end{cases}$$ VAC

Calcule la siguiente probabilidad

$$P(1/3 < X < 1/2,\ Y > 1/4)$$



$$\int_{1/3}^{1/2} \int_{1/4}^{x} 8xy\, dy\, dx$$

$$8\int_{1/3}^{1/2} x \int_{1/4}^{x} y\, dy$$

$$= 8\int_{1/3}^{1/2} x \left[\frac{y^2}{2} \Big|_{1/4}^{x} \right] dx$$

$$= 4\int_{1/3}^{1/2} x \left[y^2 \Big|_{1/4}^{x} \right] dx$$

$$= 4\int_{1/3}^{1/2} x \left[x^2 - \frac{1}{16} \right] dx$$

$$= \int_{1/3}^{1/2} 4x^3 - \frac{4x}{4 \cdot 4}\, dx$$

$$= \int_{1/3}^{1/2} 4x^3 - \frac{x}{4}\, dx$$

$$= \frac{4x^4}{4} - \frac{x^2}{8} \Big|_{1/3}^{1/2}$$

$$= \frac{1}{16} - \frac{1}{8} - \frac{1}{81} + \frac{\frac{1}{9}}{8}$$

$$= \frac{1}{16} - \frac{1}{32} - \frac{1}{81} + \frac{1}{72}$$

$$\boxed{= 0,03279}$$

2. Sean X y Y variables aleatorias discretas con f.d.p.c dada por:

VAD

$$p(x,y) = K(x+y) \quad , \quad x = 1,2,3 \quad y = 1,2$$

a) Calcule el valor de K tal que $p(x,y)$ sea la f.d.p.c de X y Y

b) calcule $P(X+Y \leq 4)$

a)

$$\sum_x \sum_y K(x+y) = 1$$

$$K\sum_x \sum_y (x+y) = 1$$

$$K \sum_x (x+1) + x+2 = 1$$

$$K \sum_x 2x+3 = 1$$

$$K\left[(2(1)+3)+(2(2)+3)+(2(3)+3)\right] = 1$$

$$K\left[5+7+9\right] = 1$$

$$\boxed{K = 1/21}$$

$$p(x,y) = \frac{x+y}{21}$$

1
2 1
3 2

b) $P(X+Y \leq 4)$

$1+1$
$1+2$
$2+1$
$2+2$
$3+1$

$$\sum_x \sum_y X+Y \leq 4 = \frac{1}{21}\left[(1+1)+(1+2)+(2+1)+(2+2)+(3+1)\right]$$

$$\frac{2+3+3+4+4}{21} = \boxed{\frac{16}{21}} = \boxed{0,7619}$$

Scanned by CamScanner

3. En un centro de diagnostico automotor, se encuentran 3 busetas, 2 taxis y 3 carros particulares, cada uno de estos se encuentra registrados en el formulario. Se toma un grupo de 4 formularios. Si X es el # de busetas y Y es el numero de taxis en el grupo de formularios, encuentre:

a) La funcion de densidad de probabilidad conjunta de X y Y

VAD

Y \ X	0	1	2	3	$P_Y(y)$
0	0	3/70	9/70	3/70	15/70
1	2/70	18/70	18/70	2/70	40/70
2	3/70	9/70	3/70	0	15/70
$P_X(x)$	5/70	30/70	30/70	5/70	

$$\text{Probabilidad} = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}} = \frac{x}{\binom{8}{4}} = VAT$$

t = y   b = x   c

$(0,1)$ $\dfrac{(2C1)(3C0)(3C3)}{(8C1)} = \dfrac{2}{70}$

$(0,2)$ $\dfrac{(2C2)(3C0)(3C2)}{(8C4)} = \dfrac{3}{70}$

$(1,0)$ $\dfrac{(2C0)(3C1)(3C3)}{(8C4)} = 3/70$

$(1,1)$ $\dfrac{(2C1)(3C1)(3C2)}{(8C4)} = \dfrac{18}{70}$

$(1,2)$ $\dfrac{(2C2)(3C1)(3C1)}{(8C4)} = \dfrac{9}{70}$

b) $P(X>2, Y<2)$

$= \dfrac{2}{70} + \dfrac{3}{70} = \boxed{\dfrac{5}{70}}$

c) $P_Y(y)$ y $P_X(x)$

d) $P(X, Y \in A)$

donde $A = \{(x,y) : x+y \leq 2\}$

$= 0 + \dfrac{3}{70} + \dfrac{9}{70} + \dfrac{2}{70} + \dfrac{18}{70} + \dfrac{3}{70} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$

Scanned by CamScanner

e) La distribucion condicional de X dado $Y=2$

$$P_{X|Y=2}(x) = \frac{P(x,2)}{P_y(2)} = \frac{P(x,2)}{\frac{15}{70}}$$

$X=0$: $\dfrac{\frac{3}{70}}{\frac{15}{70}} = \boxed{\frac{3}{15}}$ | $X=1$: $\dfrac{\frac{9}{70}}{\frac{15}{70}} = \boxed{\frac{9}{15}}$ | $X=2$: $\dfrac{\frac{3}{70}}{\frac{15}{70}} = \boxed{\frac{3}{15}}$ | $X=3$: $\dfrac{0}{\frac{15}{70}} = \boxed{0}$

TALLER (10)

1. Al evento mundial de hoteleria y turismo, llevado a cabo en el hotel intercontinental en Medellín, llegan 80 invitados al día. La encargada de la cocteleria del evento, sabe que el número de cocteles que se toma un invitado es una variable aleatoria con distribución de probabilidad dada por:

x	0	1	2	3	4	5
$P(x)$	0,1	0,15	0,2	0,25	0,2	0,1

Dis $\bar{X}$

a) Cual es la probabilidad de que la media muestra sea máximo 2 cocteles

$P(\bar{X} \le 2)$

$n > 30$ ✓

$$E[X] = \sum_{0}^{5} (x) P(x)$$

$$E[X] = (0)(0,1) + (1)(0,15) + 2(0,2) + 3(0,25) + 4(0,2) + 5(0,1)$$

$$= 2,6$$

$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$

$E[X^2] = \sum_{0}^{5} x^2 P(x) = (0)^2(0,1) + (1)^2(0,15) + (2)^2(0,2) + 3^2 (0,25) + 4^2(0,2) + 5^2(0,1)$

$= 8,9$

$Var[X] = 8,9 - (2,6)^2$

$= 2,14$

$\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$

$\mu = 2,6$

$\sigma^2/n = 2,14/80 = 0,02675$

$P(\bar{X} \leq 2)$

$\Phi\left(\frac{2-2,6}{\sqrt{0,02675}}\right)$

$\Phi(-3,67)$

$1 - \Phi(3,67) = \boxed{0,0002}$

La probabilidad de que la media muestral sea ≤ 2 cóctels es

b) Cuál es la probabilidad de que se hayan consumido a lo sumo 220 cócteles en el día?

$T \sim N(n\mu, n\sigma^2)$

$n\mu = 80(2,6) = 208$

$n\sigma^2 = 80(2,14) = 171,2$

$P(T \leq 220)$

$\Phi\left(\frac{220-208}{\sqrt{171,2}}\right)$

$\Phi(0,92)$

$\Phi(0,92) = \boxed{0,821214}$

La probabilidad de que el total de lo que se consuma 220 cócteles en el día es 82,12%

2. En una fábrica de producción de láminas de aluminio se sabe que el peso de las láminas se distribuye normalmente con desviación estándar 2,3 Kg. Para el control de calidad del producto, se han establecido que para n láminas seleccionadas, el peso promedio no se debe encontrar a más de 1 Kg de la verdadera media el 95% de los casos. Encuentre el número mínimo de láminas que se deberían examinar para cumplir el requerimiento

$\sigma^2 = 2{,}3^2 \quad P(|\bar{x} - \mu| \leq 1) = 0{,}95 \qquad X_i \sim N(\mu, 2{,}3/n)$

$n = ?$

$P(-1 < \bar{x} - \mu < 1)$

$P(-1 + \mu \leq \bar{x} \quad 1 + \mu)$

$$\Phi\left(\frac{-1 + \cancel{\mu} - \cancel{\mu}}{\frac{2{,}3}{\sqrt{n}}} \leq \bar{x} \leq \frac{1 + \cancel{\mu} - \cancel{\mu}}{\frac{2{,}3}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2{,}3}\right) - \Phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{2{,}3}\right) = 0{,}95$$

$$w = \frac{\sqrt{n}}{2{,}3}$$

$$\Phi(w) - \Phi(-w) = 0{,}95$$

$$2\,\Phi(w) - 1 = 0{,}95$$

$$\Phi(w) = 0{,}975$$

$$w = 1{,}96$$

$$1{,}96 = \frac{\sqrt{n}}{2{,}3}$$

$$[(1{,}96)(2{,}3)]^2 = n$$

$$n = 20{,}3$$

$$\boxed{n = 21}$$

3. El puntaje promedio de las pruebas de admisión a pregrado en la Nacional es de 500, con una desviación estándar de 100. Encuentre la probabilidad de que el puntaje ~~de admisión~~ promedio de dos grupos seleccionados al azar, que consta de 63 y 72 estudiantes respectivamente, difiera por más de 50 puntos

$\mu = 500$
$\sigma = 100$

$Y_{63} \sim N(500, 100^2/63)$

$n_1 = 63$
$n_2 = 72$

$Y_{72} \sim N(500, 100^2/72)$

D = Diferencia de Promedios entre grupo

$D = |Y_{63} - Y_{72}|$

$P(|Y_{63} - Y_{72}| \geq 50)$

$E[D] = E[Y_{63}] - E[Y_{72}]$
$= 500 - 500$
$= 0$

$Var(D) = Var[Y_{63}] + Var[Y_{72}]$
$= \frac{100^2}{63} + \frac{100^2}{72}$
$= \boxed{297,62}$

$D \sim N(0, 297.62)$

$P(|D| > 50) = 1 - P(|D| \leq 50)$

$1 - P(-50 \leq D \leq 50)$

$1 - P\left(\frac{-50-0}{\sqrt{297,62}} \leq D \leq \frac{50-0}{\sqrt{297,62}}\right)$

$1 - [\Phi(2,9) - \Phi(-2,9)]$

$1 - [2\Phi(2,9) - 1]$

$2 - 2\Phi(2,9)$

$2 - 2(0,9981) = \boxed{0,000373}$

4. En los ultimos meses Laura se propuso tomar te verde de Matcha todos los dias. La cantidad de esta bebida que ingiere en un dia dado es independiente de su consumo en cualquier otro dia. Dicha cantidad se encuentra normalmente distribuida con media de 12 onzas y desviacion estandar de 3 onzas. Suponiendo que, en un momento dado, Laura prepara 5 termos de 24 onzas cada uno

a) Cual es la probabilidad de que al cabo de 2 semanas aún tenga algo de té preparado

$\mu = 12$
$\sigma = 3$

120 onzas preparadas

2 semanas = 14 días

$$P(T \leq 120)$$

$T \sim N(n\mu, n\sigma^2)$

$n\mu = 14(12) = 168$
$n\sigma^2 = 14(9) = 126$

$$P(T \leq 120)$$

$$\Phi\left(\frac{120-168}{\sqrt{126}}\right) = \Phi(-4{,}27)$$
$$= 1 - \Phi(4{,}27)$$
$$= 1 - 0{,}99999 = \boxed{0{,}00001}$$

La probabilidad de que al cabo de 2 semana tenga algo de te preparado e casi nula

b) Cual debe ser el valor de la media para que al cabo de 2 semanas aún tenga algo del té preparado con una probabilidad de 60%?

$$P(T \leq 120) = 0{,}60$$

$$\Phi\left(\frac{120 - 14(\mu)}{\sqrt{126}}\right) = 0{,}60$$
$$\frac{120 - 14(\mu)}{\sqrt{126}} = 0{,}26$$

$$0{,}26 = \frac{120 - 14\mu}{\sqrt{126}}$$

$$\frac{(0{,}26 \cdot \sqrt{126}) - 120}{-14} = \mu$$

$$\boxed{\mu = 8{,}36}$$

TALLER (11)

1 Federico tiene una empresa que procesa el cacao y produce chocolates con alto porcentaje de cacao. El peso de varios barras de Chocolate 70% (en gramos)

65	66,9	65
65,6	66,3	
65,3	65,4	
66,2	65,7	
67,4	65,1	
63,4	63,5	
65,1	63	
64,8	62,9	
65,9	65,7	

a) Obtenga una estimación puntual para el peso medio de todas las barras de chocolate. Use un estimador insesgado y luego demuestre que realmente lo es

Un estimador insesgado es $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

$\bar{x} = 65,17$

Es insesgado si

$0 = E[\hat{\theta}] - \theta$

$\theta = E[\hat{\theta}]$

Entonces

$E[\bar{x}] = \frac{1}{n} E[\sum_{i=1}^{n} x_i]$

$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E[x_i]$

$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mu$

$= \frac{1}{n} (n\mu)$

$E[\bar{x}] = \mu$ Entonces es insesgado

b) Calcule la estimación puntual de la proporción de barras de chocolate cuyo peso excede de 66 gramo. Use un estimador insesgado y luego demuestre que realmente lo es

$X \sim bin(n, p)$ $\quad E[X] = n \cdot p$ $\quad n = ?$ $p = ?$

Un estimador insesgado de la proporción es

$\hat{p} = \frac{X}{n}$ $\quad E[\hat{p}] = E[X/n]$

$= \frac{1}{n} E[X]$

$= \frac{1}{\cancel{n}} \cancel{n} p$

$E[\hat{p}] = p$

4 valores exceden 66 Por tanto

$$\boxed{\frac{4}{10} = p}$$

2. Sea $X_1, X_2, \dots, X_n$ una muestra aleatoria del número de platos con papitas fritas que se preparan en un restaurante de comidas rápidas en una hora. Se propone dos estimadores puntuales para el número promedio de platos con papas fritas por hora (λ)

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \hat{\lambda}_2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

a) Son estos estimadores insesgados

$X \sim Poisson(\lambda)$ $\quad E[X] = \lambda = Var[X]$

$E[\hat{\lambda}_1] = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} E[x_i]$ | $E[\hat{\lambda}_2] = \frac{1}{n-1} \sum_{1}^{n} E[x_i]$

$E[\hat{\lambda}_1] = \frac{1}{n+1} n\lambda$ No insesgado | $E[\hat{\lambda}_2] = \frac{n\lambda}{n-1}$ No insesgado

$$E[\hat{\lambda}_1] \neq \lambda \neq E[\hat{\lambda}_2]$$

b) Calcule el ECM para cada estimador

$$ECM = Var[\hat{\theta}] + B^2$$

$Var[\hat{\lambda}_1] = \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{i=1}^{n} Var[x_i]$

$Var[\hat{\lambda}_1] = \frac{n\lambda}{(n+1)^2}$

$Var[\hat{\lambda}_2] = \frac{1}{(n-1)^2} \sum_{i=1}^{n} Var[x_i]$

$Var[\hat{\lambda}_2] = \frac{n\lambda}{(n-1)^2}$

$B\hat{\lambda}_1 = E[\hat{\lambda}_1] - \lambda$

$B\hat{\lambda}_1 = \frac{n\lambda}{n+1} - \lambda = \frac{\cancel{n\lambda} - \cancel{n\lambda} - 1}{n+1}$

$B\hat{\lambda}_2 = E[\hat{\lambda}_2] - \lambda$

$B\hat{\lambda}_2 = \frac{n\lambda}{(n-1)} - \lambda = \frac{1}{n-1}$

$ECM\hat{\lambda}_1 = \frac{n\lambda}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2}$

$ECM\hat{\lambda}_2 = \frac{n\lambda}{(n-1)^2} + \frac{1}{(n-1)^2}$

c) Cual estimador es mejor para λ?

$$ECM\hat{\lambda}_2 > ECM\hat{\lambda}_1$$

Por tanto el mejor estimador es $\hat{\lambda}_1$

3. Durante 20 semanas se registra la masa (Kg) semanal de una persona con hipotiroidismo, los registros se muestran a continuación

70	70,5	69
69,8	71,1	69,5
69,3	70,8	70
69,5	70,1	70,3
70,3	68	
70,6	68,3	
69,8	68,6	
70	69,5	

Se sabe por experiencia que la distribución del peso de personas con hipotiroidismo es normal. Estime la probabilidad de que su índice de masa corporal IMC sea inferior a 25 (para evitar sobrepeso). La persona tiene una estatura de 166cm

Ayuda 1: La formula del IMC es la masa en Kg dividido por el cuadrado de la altura la altura en metros (Kg/m²)

Ayuda 2: Estime la media y la desviación estandar de la distribución de las masas

$P(IMC < 25)$ $\quad IMC = \frac{Masa}{(1,66)^2} = \frac{X}{(1,66)^2}$

$P\left(\frac{X}{(1,66)^2} < 25\right)$

$P(X \leq 68,89)$

$\mu = \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = 69,75$

$\sigma^2 = S^2 = \frac{1}{n-1}\sum(X_i - \bar{X})^2$

$= \frac{1}{19}\sum(X_i - \bar{X})^2 = 0,662$

$\Phi\left(\frac{68,89 - 69,75}{0,813}\right)$

$\Phi(-1,06)$

$\sigma = 0,813$

$1 - \Phi(1,06) = \boxed{0,1445}$

Scanned by CamScanner

1. Sea $X_1, X_2, \ldots X_n$ una muestra aleatoria de una población con media μ y varianza σ^2 ambos desconocidos, Se proponen los siguientes estimadores para μ

$$\hat{\mu}_1 = \frac{4X_1 + 6X_2 + AX_n}{20} \qquad \hat{\mu}_2 = \frac{5X + 3X_2 + BX_n}{15}$$

a) Cuál es el valor de A y B para que los estimadores sean insesgados

$$E[\hat{\mu}_1] = \frac{4E[X_1] + 6E[X_2] + A[X_n]}{20}$$

$$\frac{10\mu + A\mu}{20} \qquad \boxed{A = 10}$$

$$E[\mu_2] = \frac{5E(X_1) + 3E[X_2] + B[X_n]}{15}$$

$$B = \frac{8\mu + B\mu}{15} \qquad \boxed{B = 7}$$

b) Cuál de los dos estimadores es el mejor para μ ya que son insesgados comparamos varianza

$$Var[\hat{\mu}_1] = \frac{16\,Var[X_1]}{400} + \frac{36\,Var[X_2]}{400} + \frac{100\,Var[X_n]}{400}$$

$$Var[\hat{\mu}_1] = \frac{16\sigma^2}{400} + \frac{36\sigma^2}{400} + \frac{100}{400}\sigma^2 = 0{,}38$$

$$Var[\hat{\mu}_2] = \frac{25\sigma^2}{225} + \frac{9\sigma^2}{225} + \frac{49\sigma^2}{225} = 0{,}368$$

El mejor $\hat{\mu}_2$ ya que tiene menor Var

62) Dada la función de densidad bivariada encontrar para X y Y

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi} \cos(x) + \cos(y) \qquad 0 \le x \le \pi/2 \quad 0 \le y \le \pi/2$$

$$P(X \le \pi/4)$$

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\pi} \cos(x) + \cos(y)\, dx\, dy$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(x) + x\cos(y) \Big|_0^{\pi/4}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4} \cos(y)\, dy$$

$$\frac{1}{\pi} \left[\frac{y\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4} \operatorname{sen}(y) \Big|_0^{\pi/2} \right]$$

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{4\pi} + \frac{\pi}{4\pi} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{4} = \boxed{0{,}6036}$$

63) Sean X e Y variables aleatorias discretas con f.m.p.c dada por

$$p(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{36} & x, y = 1, 2, 3 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

El valor esperado $E[X^2 Y + 1]$

$$E[X^2] \cdot E[Y] + 1$$

Scanned by CamScanner

$$E[x^2] = \sum_x \sum_y x^2 \frac{(xy)}{36}$$

$$E[x^2] = \frac{1}{36}\sum_x x^3 + 2x^3 + 3x^3$$

$$= \frac{1}{36}\sum_x 6x^3$$

$$= \frac{1}{6}\sum_x x^3$$

$$= 1/6\,[1+8+27]$$

$$= 6$$

$$E(y) = \frac{1}{36}\sum_x \sum_y xy^2$$

$$E[y] = \frac{1}{36}\sum_y y^2 + 2y^2 + 3y^2$$

$$= \frac{1}{36}\sum_y 6y^2$$

$$= \frac{1}{6}\sum_y y^2$$

$$= 1/6\,[1+4+9]$$

$$= \frac{14}{6}$$

$$6 \cdot \frac{14}{6} + 1 = \boxed{15}$$

(64) Una antropologa desea calcular el promedio de estatura de los hombres de cierta raza. Si se supone que la desviacion estandar de las estaturas es 2,5 y toma una muestra de 100 hombres, la probabilidad de que la muestra no exceda a la media poblacional en mas de 0,5 plg es

$\sigma = 2,5$

$n = 100$

$\bar{X} \leq \mu + 0,5$

$P(\bar{X} \leq \mu + 0,5)$

$\Phi\left(\frac{\cancel{\mu} + 0,5 - \cancel{\mu}}{2,5/10}\right)$

$\Phi(2)$

$\Phi(2) = \boxed{0,9773}$

Scanned by CamScanner

(65) Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población con distribución de probabilidad dada por

$$f(x) = \frac{2x}{\theta^2}, \quad 0 < x < \theta \quad \theta > 0$$

Sea $\hat{\theta} = \frac{X_1 + X_2 + X_n}{3}$, La varianza y sesgo de este estimador son

$$E[X] = \frac{2}{\theta^2}\int_0^\theta x^2\,dx$$

$$= \frac{2}{\theta^2}\left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^\theta\right)$$

$$= \frac{2\theta^3}{3\theta^2} = \boxed{\frac{2\theta}{3}}$$

$$E[X^2] = \frac{2}{\theta^2}\int_0^\theta x^3\,dx$$

$$E(x^2) = \frac{2}{\theta^2}\,\frac{\theta^4}{4}$$

$$E[x^2] = \boxed{\frac{\theta^2}{2}}$$

$$Var[X] = E[x^2] - (E[x])^2$$

$$Var[x] = \frac{\theta^2}{2} - \frac{4\theta^2}{9}$$

$$Var[x] = \frac{\theta^2}{18}$$

$$E[\hat{\theta}] = \frac{1}{3}\left(E[X_1] + E[X_2] + E[X_n]\right)$$

$$E[\hat{\theta}] = \left[\frac{2}{3}\theta + \frac{2}{3}\theta + \frac{2}{3}\theta\right] / 3$$

$$E[\hat{\theta}] = \boxed{\frac{2\theta}{3}}$$

$$Var[\hat{\theta}] = \frac{1}{9}\left(Var[X_1] + Var[X_2] + Var[X_n]\right)$$

$$Var[\hat{\theta}] = \left[\frac{\theta^2}{18} + \frac{\theta^2}{18} + \frac{\theta^2}{18}\right] / 9$$

$$\frac{\frac{3\theta^2}{18}}{9} = \frac{3\theta^2}{162} = \boxed{\frac{\theta^2}{54}}$$

$$B = E[\hat{\theta}] - \theta$$

$$B = \frac{2\theta}{3} - \frac{\theta}{1} = \boxed{\frac{-\theta}{3}}$$

Scanned by CamScanner

66) Sean X e Y Variables aleatorias discretas con f.m.p conjunta dada por

$$p(x,y) = \begin{cases} Kxy & x,y = 1,2,3 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El valor esperado de X es:

$$E[X] = \sum_x \sum_y x\, Kxy \qquad K = ??$$

$$\sum_x \sum_y Kxy = 1$$

$$K \sum_x x + 2x + 3x = 1$$

$$K \sum_x 6x = 1$$

$$6K[1+2+3] = 1$$

$$36K = 1$$

$$K = 1/36$$

$$= E[X] = \frac{1}{36} \sum_x \sum_y x^2 y$$

$$= E[X] = \frac{1}{36} \sum_x x^2 + 2x^2 + 3x^2 = 6x^2$$

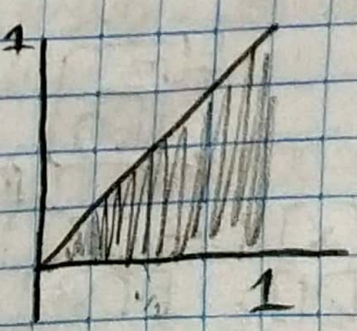
$$= E[X] = \frac{1}{6} [1+4+9] = 14$$

$$= E[X] = \frac{14}{6} = \boxed{\frac{7}{3}}$$

67) Sean X e Y Variables aleatorias con distribución Conjunta dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 3x & 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Calcule $Corr[X,Y]$



$$Corr(X,Y) = \frac{Cov[X,Y]}{\sigma_x \sigma_y}$$

$$Cov = E[XY] - E[X]E[Y]$$

$$\int_0^1 \int_0^x xy(3x)\,dy\,dx = E[XY]$$

$$3\int_0^1 \int_0^x x^2 y\,dy\,dx$$

$$3\int_0^1 x^2 \left(\frac{y^2}{2}\Big|_0^x\right) dx$$

$$\frac{3}{2}\int_0^1 \cdot x^4\,dx$$

$$\frac{3}{2} \quad \frac{x^5}{5}\Big|_0^1 = 3/10$$

$$E[X] = 3\int_0^1 \int_0^x x^2\,dy\,dx$$

$$3\int_0^1 x^3\,dx = \frac{3}{4}$$

$$E[Y] = 3\int_0^1 x \int_0^x y\,dy\,dx$$

$$\frac{3}{2}\int_0^1 x \; x^2 = \frac{3}{8}$$

$$Cov(x,y) = \frac{3}{10} - \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{8}$$

$$= \boxed{\frac{3}{160}}$$

$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2$$
$$Var[Y] = E[Y^2] - E[Y]^2$$

$$E[X^2] = 3\int_0^1 x^4\,dx = \frac{3}{5}$$

$$E[Y^2] = \frac{3}{3}\int_0^1 x^4\,dx = \frac{1}{5}$$

$$Var[X] = \frac{3}{5} - \frac{9}{16} = \frac{3}{80}$$

$$Var[Y] = \frac{1}{5} - \frac{9}{64} = \frac{19}{320}$$

$$Corr[X,Y] = \frac{3/160}{\sqrt{3/80}\sqrt{19/320}}$$

$$= 0{,}3973$$

$$\boxed{= \frac{3}{\sqrt{57}}}$$

(68) Sean X e Y variables aleatorias continuas con fdp.c dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 4xy, & 0 < x < 1, \ 0 < y < 1 \\ 0, & e.o.c \end{cases}$$

Rta = $E[XY] = E[X]\,E[Y]$
Es la unica con sentido

(69) Sean X e Y variables aleatorias discretas con distribución conjunta dada por

		x: 0	1	2	
y	0	1/9	2/9	1/9	4/9
	1	2/9	2/9	0	4/9
	2	1/9	0	0	1/9
		4/9	4/9	1/9	

La $\text{corr}[X,Y]$

$$\text{Corr}[X,Y] = \frac{\text{cov}[X,Y]}{\sigma_x \sigma_y}$$

$$\text{Cov}[X,Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$$

$$\text{Var}[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$
$$\text{Var}[Y] = E[Y^2] - (E[X])^2$$

$$E[X] = \sum_0^2 x\, P_x(x) = 0\,(4/9) + 1\,(4/9) + 2\,(1/9) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$E[Y] = \sum_0^2 y\, P_y(y) = 0\,(4/9) + 1\,(4/9) + 2\,(1/9) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$E[XY] = \sum_{0}^{2}{}_x \sum_{0}^{2}{}_y\, xy\, P(x,y) = \sum_{0}^{2}{}_x\, x P(x,1) + 2x\, P(x,2)$$

$$= P(1,1) + 2\,P(2,1) + 2\,P(1,2) + 2(2)\,P(2,2)$$
$$= \frac{2}{9} + 0 + 0 + 0$$

Scanned by CamScanner

$$\text{Cov}[X,Y] = \frac{2}{9} - \frac{4}{9} = \boxed{\frac{-2}{9}}$$

$$E[X^2] = \frac{4}{9} + \frac{4}{9} = \frac{8}{9} \qquad Var[X] = \frac{8}{9} - \frac{4}{9} = \frac{4}{9}$$

$$E[Y^2] = \frac{4}{9} + \frac{4}{9} = \frac{8}{9} \qquad Var[Y] = \frac{8}{9} - \frac{4}{9} = \frac{4}{9}$$

$$\sigma_x = \frac{2}{3} \qquad \sigma_y = \frac{2}{3} \qquad \sigma_x \sigma_y = \frac{4}{9}$$

$$\text{Corr} = \frac{\frac{-2}{9}}{\frac{4}{9}} = \frac{-18}{36} = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

70) El tiempo (en minutos) que una persona permanece en la fila de un banco es una variable aleatoria con densidad dada por

$$f(x) = x\,e^{-x} \quad \text{Para } x > 0$$

En un dia particular se miden los tiempos que permanecen en fila 100 personas seleccionadas aleatoriamente. La probabilidad de que el tiempo promedio en fila sea superior a 2,2 min

$n = 100$ TLC

$P(\bar{X} \geq 2{,}2 \text{ min})$

$$E[X] = \int_0^\infty x^2 e^{-x} = \boxed{2}$$

$$E[X^2] = \int_0^\infty x^3 e^{-x} = \boxed{6}$$

$$Var(\bar{X}) = E[\bar{X}^2] - (E[\bar{X}])^2$$
$$= 6 - 2^2$$
$$= 2$$

$\bar{X} \sim N(2, 2/100)$ | $1-\Phi(1{,}41) = \boxed{0{,}07927}$

$P(\bar{X} \geq 2{,}2)$

$1 - P(\bar{X} \leq 2{,}2)$

$$1-\Phi\left(\frac{2{,}2-2}{\sqrt{\frac{2}{100}}}\right)$$

Caso especial de d. gamma

$$\int_0^{\infty} x^{\theta} e^{-x} = \boxed{\theta!}$$

⑦ Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una poblacion con distribucion

$$f(x) = 3\frac{\beta^3}{x^4}, \text{ para } x \geq \beta \text{ y } \beta > 0$$

Considere el siguiente estimador para β

$\hat{\beta} = \bar{X}$, El error estandar de $\hat{\beta} = \bar{X}$ es:

$\sqrt{Var[\hat{B}]}$ = Error estandar

$$Var[\hat{B}] = E[\hat{B}^2] - (E[\hat{B}])^2$$

$$Var[\bar{x}] = E[\bar{x}^2] - (E[\bar{x}])^2$$

$$E[X] = \int_B^{\infty} \frac{3B^3}{X^3} = \frac{3B^3}{-2X^2}\Bigg|_B^{\infty} = \cancel{\frac{-3B^3}{2(\infty)^2}}^{\,0} + \frac{3B^3}{2B^2} = \frac{3B}{2}$$

$$E[X^2] = \int_B^{\infty} \frac{3B^3}{X^2} = \frac{-3B^3}{X}\Bigg|_B^{\infty} = \cancel{\frac{-3B^3}{2(\infty)}}^{\,0} + \frac{3B^3}{B} = 3B^2$$

$Var[X] = 3B^2 - \frac{9B^2}{4}$ $\sqrt{var[\bar{X}]}$ $Var[\bar{X}] = \frac{Var(x)}{n}$

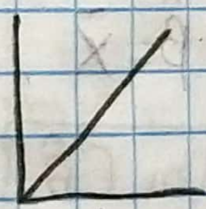
$$\boxed{\frac{\sqrt{3}\,B}{2\sqrt{n}}}$$

$$var[X] = \frac{12B^2 - 9B^2}{4}$$

$$var[X] = \frac{3B^2}{4}$$

72) Se almacena gasolina en una cisterna de gran capacidad al principio y despues se vende al publico. Sea Y_1 el nivel de gasolina que alcanza el tanque despues de surtirlo, que varia cada semana debido al abastecimiento limitado de gasolina. Sea Y_2 la proporcion de la capacidad de la cisterna que se vende durante la semana. Y_1 y Y_2 son proporciones, ademas, la cantidad de gasolina vendida, Y_2, no puede exceder la cantidad disponible Y_1. La funcion de probabilidad conjunta para Y_1 y Y_2 dada por

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} 3y_1, & 0 \leq y_2 \leq y_1 \leq 1 \\ 0, & e.o.c. \end{cases}$$



La probabilidad de que se venda menos de un cuarto de gasolina esta dada por:

$$\int_0^{1/4}\int_1^{y_2} 3y_1 \, dy_1 dy_2$$

$$3\int_0^{1/4}\int_{y_2}^{1} y_1 \, dy_1 dy_2$$

$$\frac{3}{2}\int_0^{1/4}\left[y_1^2 \Big|_{y_2}^{1}\right] dy_2$$

$$\frac{3}{2}\int_0^{1/4} -y_2^2 + 1 \, dy_2$$

$$\frac{3}{2}\left[-\frac{y^3}{3} + y \Big|_0^{1/4}\right] = \frac{3}{2}\left[-\frac{1}{192} + \frac{1}{4}\right]$$

$$= \frac{47}{128}$$

73) Sean X e Y UAD con distribucion conjunta dada por

	0	1	2
0	1/9	2/9	1/9
1	2/9	2/9	0
2	1/9	0	0

Diga cual es verdadera o falsa y porque

- $E[XY] = 2/9$

  Verdadero

  $E[X,Y] = 1P(1,1) = 2/9$

- $P_X(x) = \binom{2}{x} \left(\frac{2}{3}\right)^x \left(\frac{1}{3}\right)^{2-x}$

  Falso, es la sumatoria de los ~~X~~ y deberia ser de los Y

- $Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y]$

  Falso, estas variables estan relacionadas por tanto $cov(x,y) \neq 0$ entonces faltaria cov en la proposicion anterior

- X e Y son independientes
  Falso, estan relacionados

(74) Un supermercado tiene tres cajas registradoras (numeradas 1, 2, 3). Dos clientes llegan a las cajas en momentos diferentes cuando las cajas estan desocupadas. Cada cliente escoge de manera aleatoria e independiente, una caja. Sea X la variable aleatoria numero de clientes que escogen la caja 1 y se Y número de clientes que escogen la caja 2. La probabilidad de que un cliente seleccione la caja 1 y el otro la 2 es

$$P(X=1 \wedge Y=1) = P(X|Y)\,P(Y)$$

$$P(X=1 \mid Y=1) = \frac{\overset{y}{\binom{1}{1}} \overset{x}{\binom{1}{1}} \binom{1}{0}}{\binom{3}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$P(Y=1) = \frac{\overset{y}{\binom{1}{1}} \overset{x}{\binom{1}{1}} \binom{1}{0}}{\binom{3}{2}} + \frac{\overset{y}{\binom{1}{1}} \overset{x}{\binom{1}{0}} \binom{1}{1}}{\binom{3}{2}}$$

$$P(Y=1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$P(X=1 \wedge Y=1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \boxed{\frac{2}{9}}$$

75) La cantidad de liquido consumido por un deportista en cierta competencia, es una variable aleatoria normal, con media 2,5 lts y desviacion estandar 0,5 lts. Si hay 16 deportistas, la probabilidad de que el consumo total de liquido sea inferior a 42 lts es:

$\mu = 2{,}5$ $\quad n = 16$

$\sigma = 0{,}5$ $\quad P(T \leq 42)$

$T \sim N(n\mu, n\sigma^2)$ $\quad n\mu = 40$

$n\sigma^2 = 4$

$P(T \leq 42)$

$$\Phi\left(\frac{42 - 40}{2}\right) \qquad \Phi(1) = \boxed{0{,}8413}$$

76) Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución con media μ desconocida y varianza σ^2, conocida. Considere los siguientes estimadores para μ

$$\hat{\mu}_1 = \frac{X_1 + 2X_2 + 3X_n}{6} \qquad \hat{\mu}_2 = \frac{4X_1 + X_2 - 2X_n}{3}$$

$$\hat{\mu}_3 = \frac{X_1 + X_n}{2} \qquad \hat{\mu}_4 = \frac{2X_1 + 3X_n}{5}$$

El mejor estimador de μ

$$E[\hat{\mu}_1] = \frac{\overset{\mu}{\cancel{E[X_1]}}}{6} + \frac{2\overset{\mu}{\cancel{E[X_2]}}}{6} + \frac{3\overset{\mu}{\cancel{E[X_n]}}}{6} = \frac{6\mu}{6} = \mu$$

insesgado

$$E[\hat{M}_2] = \frac{4\cancel{E[X_1]}^{M} + \cancel{E[X_2]}^{M} - 2\cancel{E[X_n]}^{M}}{3} = \frac{2M}{3} \quad \text{Sesgado}$$

$$E[\hat{M}_3] = \frac{\cancel{E[X_1]}^{M} + \cancel{E[X_n]}^{M}}{2} = \frac{2M}{2} = M \quad \text{insesgado}$$

$$E[\hat{M}_4] = \frac{2\cancel{E[X_1]}^{M} + 3\cancel{E[X_n]}^{M}}{5} = \frac{5M}{5} = M \quad \text{insesgado}$$

$$Var[\hat{M}_1] = \frac{\cancel{Var[X_1]}^{\sigma^2}}{36} + \frac{4\cancel{Var[X_2]}^{\sigma^2}}{36} + \frac{9\cancel{Var[X_n]}^{\sigma^2}}{36}$$

$$= \frac{14\sigma^2}{36} = \boxed{\frac{7\sigma^2}{18}}$$

$$Var[\hat{M}_3] = \frac{\cancel{Var[X_1]}^{\sigma^2} + \cancel{Var[X_n]}^{\sigma^2}}{4} = \boxed{\frac{1}{2}\sigma^2}$$

$$Var[\hat{M}_4] = \frac{4\cancel{Var[X_1]}^{\sigma^2}}{25} + \frac{9\cancel{Var[X_n]}^{\sigma^2}}{25} = \boxed{\frac{13}{25}\sigma^2}$$

$$Var[\hat{M}_1] < Var[M_3] < Var[M_4]$$

Por tanto $Var[\hat{M}_1]$ es el mejor estimador

77) Sea $X_1, \dots, X_n$ una muestra aleatoria de una población con distribución de probabilidad dada por

$f(x) = \frac{2x}{\theta^2}$, $0 < x < \theta$ con $\theta > 0$ un estimador insesgado para θ es $\boxed{\hat{\theta}_4}$

$$E[X] = \int_0^\theta \frac{2x^2}{\theta^2}\,dx = \frac{2}{\theta^2}\int_0^\theta x^2\,dx$$

$$= \frac{2}{\theta^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]\Big|_0^\theta = \boxed{\frac{2}{3}\theta}$$

Insesgado

$$E[\hat{\theta}] = \theta$$

$$\hat{\theta}_1 = \frac{x_1 + x_2 + x_n}{2} \Rightarrow E[\hat{\theta}] = \frac{\cancel{E[x_1]}^{2/3\,\theta} + \cancel{E[x_2]}^{2/3\,\theta} + \cancel{E[x_n]}^{2/3\,\theta}}{2}$$

$$= \frac{\frac{6\theta}{3}}{\frac{2}{1}} \quad \frac{6\theta}{6\theta} = \theta \quad \text{Sesgado}$$

$$\hat{\theta}_4 = \frac{x_1 + 2x_2 + 3x_n}{6} = \frac{\cancel{E[x_1]}^{2/3\,\theta} + \cancel{2E[x_2]}^{4\theta/3} + \cancel{3E[x_n]}^{6\theta/3}}{6}$$

$$= \frac{\frac{12\theta}{3}}{\frac{6}{1}} = \frac{12\theta}{18\theta} = \boxed{\frac{2}{3}\theta}$$

Insesgado

78) Sean X e Y variables aleatorias tales que $E(X) = 1$, $E[Y] = 2$, $Var[X] = 4$, $Var[Y] = 9$ y $cov[X, Y] = 3$. Defina $W = 3X + 1$ y $T = -2Y + 4$. La correlación entre W y T es

$$Corr[W,T] = \frac{Cov(W,T)}{\sigma_W \cdot \sigma_T}$$

$$Cov(W,T) = E[WT] - E[W] \cdot E[T]$$

$$E[W] = E[3X] + 1 = 3E[X] + 1 = 4$$

$$E[T] = -2E[Y] + 4 = 0$$

$$cov[W,T] = cov[3X+1, -2Y+1] = -6\,cov[X,Y] = -18$$

$$Var[W] = Var[3X+1] = 9\,Var[X] = 36$$

$$Var[T] = Var[-2Y+1] = 4\,Var[Y] = 36$$

$$\sigma_W = 6$$

$$\sigma_T = 6$$

$$Corr[W,T] = \frac{cos[W,T]}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{-18}{6 \cdot 6} = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

79) Dos Monedas no cargadas son lanzadas dos veces. Sea X_i el numero de caras obtenidas en el lanzamiento i, con $i = 1, 2$. Sea $\bar{X}$ el promedio de X_1 y X_2 la probabilidad de que $\bar{X} < 1.5$

$X = \frac{X_1 + X_2}{2}$ entonces $\frac{X_1 + X_2}{2} \leq 1{,}5$

$X_1 + X_2 < 3$

$X_1 = 0, 1, 2$
$X_2 = 0, 1, 2$

	$X_1 + X_2$	$X_1 \wedge X_2$
0	0+0	$1/4 \cdot 1/4$
	0+1	$1/4 \cdot 2/4$
1	1+0	$1/2 \cdot 1/4$
	1+1	$1/2 \cdot 1/2$
2	0+2	$1/4 \cdot 1/4$
	2+0	$1/4 \cdot 1/4$

$P(0) = \frac{1}{4}$

$P(1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$P(2) = 1/4$

$X_1 \wedge X_2$

1/16
1/8
1/8
1/4
1/16
1/16

$\Sigma = \boxed{11/16}$

$P(X_1 + X_2 < 3)$

$P(X_1 + X_2 \leq 2)$

$\Sigma\ P(0) + P(1) + P(2) = \boxed{11/16}$

(80) Sean X e Y variables aleatorias discretas con f.M.P conjunta dada por

$$P(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{36} xy & x, y = 1, 2, 3 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

La $\operatorname{cov}[X, Y]$ es

$\operatorname{cov} = E[XY] - E[X]\,E[Y]$

$$E[x] = \frac{1}{36}\sum_x \sum_y x^2 y = \frac{1}{36}\sum_x x^2 + 2x^2 + 3x^2 = \frac{1}{6}\sum_x x^2$$

$$= \frac{1}{6} \quad 1+4+9$$

$$= \frac{14}{6} = \boxed{\frac{7}{3}}$$

$$E[y] = \frac{1}{36}\sum_x \sum_y xy^2 = \frac{1}{36}\sum_x x + 4x + 9x = \frac{14}{36}\sum_x x$$

$$= \frac{14}{36}(1+2+3) = \frac{\cancel{6}\,14}{6\,\cancel{6}} = \frac{14}{6} = \boxed{\frac{7}{3}}$$

$$E[xy] = \frac{1}{36}\sum_x \sum_y x^2 y^2 = \frac{1}{36}\sum_x x^2 + 4x^2 + 9x^2 = \frac{14}{36}\sum_x x^2$$

$$= \frac{14}{36}(1+4+9) = \frac{14 \cdot 14}{36} = \boxed{\frac{49}{9}}$$

$$Cov[x,y] = \frac{49}{9} - \frac{49}{9} = \boxed{0}$$

TALLER 12

1 Por experiencia se ha encontrado que el número de personas víctimas de personas víctimas de armas corto punzantes por noches en Medellín, es una variable aleatoria con distribución Poisso, con parámetro. Sea $X_1, X_2, \ldots X_n$ una muestra aleatoria que representa el número de personas víctimas de armas corto punzante durante n noches en Medellín. Halle el EMV para λ. Suponga que la alcaldía desea cono-

cer si es necesario tomar acciones y se han registrado durante 30 noches, este fenómeno. Los resultados se muestran a continuación

Numero de Personas	2	3	4	5	6	7	8
Frecuencia	10	6	4	5	3	1	1

La alcaldia tomará una decisión de aumentar presencia policial en las noche si en al menos el 50% de los casos, el número de victimas es superior a 4 por noche. ¿Cual es la decisión de la alcaldia

Tip Calculadora
1. MODE
2. 3: STAT
3. 1-VAR
4. SHIFT + MODE + ▼
5. 4: STAT
6. Frequency? 1: ON

$\bar{x}$
1. SHIFT + 1
2. 4: Var
3. 2: $\bar{x}$

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x_i!} \qquad n=30$$

1 Hallar $L(\lambda)$

$$L(\lambda) = \prod_{1}^{n} f(x_i,\lambda) = \left(\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_1}}{x_1!}\right)\left(\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_2}}{x_2!}\right)\left(\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_n}}{x_n!}\right)$$

$$= \frac{(e^{-\lambda})^n \lambda^{\sum x_i}}{\prod_{i} x_i!}$$

2. Halla $\ell(\lambda)$

$$\ell(\lambda) = \frac{(e^{-\lambda})^n \lambda^{\sum x_i}}{\prod_{i} x_i!} = -\lambda n + \sum x_i \ln(\lambda) - \ln\left(\prod_{i}^{n} x_i!\right)$$

3 Halla: $\ell_\lambda(\lambda)$ =

$$\ell_\lambda(\lambda) = -n + \frac{\sum x_i}{\lambda} + 0 =$$

4. Igualar a cero. $l_\lambda = 0$

$$-n + \frac{\sum x_i}{\lambda} = 0 \qquad \lambda = \frac{\sum x_i}{n} = \bar{x}$$

$$\frac{\sum x_i}{\lambda} = n$$

5. Verificar viendo si $l_{\lambda\lambda}$ es negativo

$$l_{\lambda\lambda} = -\frac{\sum x_i}{\lambda^2}$$ Lo es.

Ahora que tenemos que $\lambda = \bar{X}$ entonces podemos calcular lo requerido

$\lambda = \bar{x} = 3,73$ $\quad X \sim Poiss(\lambda)$ para $\lambda = 3,73$

$$P(X > 4) = 0,5$$

$$1 - P(X < 4) = 0,5$$

$$1 - \sum_{1}^{4} \frac{e^{-3,73}\, 3,73^x}{x!} = 0,32$$

El numero de victimas superior a 4 es solo 32% por lo que la alcaldia no aumentara la presencia policial.

2. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria con distribucion de probabilidad dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \theta \tau x^{\tau-1} e^{-\theta x} & x > 0 \\ 0, & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Asumiendo τ conocido halle EMV para θ.

1. Hallar $L(\theta)$

$$L(\theta) = \prod_{i}^{n} (\theta \tau x^{\tau-1} e^{-\theta x}) = (\theta \tau x_1^{\tau-1} e^{-\theta x_1})(\theta \tau x_2^{\tau-1} e^{-\theta x_2})$$

$$= \theta^n \tau^n \cdot \prod_{i}^{n} (x_i^{\tau-1}) \cdot e^{-\theta \sum x_i}$$

2 Hallar $\ell(\theta)$

$$= n \ln(\theta) + n \ln(\tau) + \ln\left(\prod^{n} (x_i^{\tau-1})\right) - \theta \sum x_i$$

3. Hallar ℓ_θ

$$\ell_\theta = \frac{n}{\theta} + 0 + 0 - \sum x_i = \frac{n}{\theta} - \sum x_i$$

4. Igualamos a Cero ℓ_θ

$$\frac{n}{\theta} = \sum x_i \quad , \quad \boxed{\hat{\theta} = \frac{n}{\sum x_i}} \quad \boxed{\hat{\theta} = \frac{1}{\bar{x}}}$$

3. Sea $x_1, x_2, \ldots, x_n$ una muestra aleatoria de una distribucion Rayleigh con funcion de densidad de probabilidad dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}} & , x > 0 \\ 0 & , \text{e. o. c} \end{cases}$$

Determine el EMV para θ

1 Hallar $L(\theta)$

$$L(\theta) = \prod_{i}^{n} \left(\frac{x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}}\right) = \left(\frac{x_1}{\theta} e^{-\frac{x_1^2}{2\theta^2}}\right)\left(\frac{x_2}{\theta} e^{-\frac{x_2^2}{2\theta^2}}\right)$$

$$= \frac{\prod x_i}{\theta^n} \cdot e^{-\frac{1}{2\theta^2}\sum x_i^2}$$

2. Hallar $\ell(\theta)$

$$\ell(\theta): \ln(\prod x_i) - n\ln(\theta) - \frac{1}{2\theta^2}\sum x_i^2$$

3. Hallar ℓ_θ

$$\ell_\theta: 0 - \frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^3}\sum x_i^2$$

4. Igualar a cero: $\ell_\theta = 0$

$$\frac{n}{\theta} = \frac{1}{\theta^3}\sum x_i^2 \Rightarrow \sqrt{\theta^2} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}} \Rightarrow \boxed{\theta = \sqrt{\frac{1}{n}\sum x_i^2}}$$

5 Verificar

$$\ell_{\theta\theta} = \frac{n}{\theta^2} - \frac{3\sum x_i^2}{\theta^4}$$

4. En cierta institución los grupos de Estadística están conformados siempre por m estudiantes. El director académico está interesado en conocer la proporción de estudiantes que reprueban dicho curso. En un semestre particular se ofrecen n cursos todos evaluados de la misma manera. Sea $x_1, x_2, \ldots, x_n$ una muestra aleatoria que representa el número de estudiantes que reprueban por grupo el curso. Halle el EMV para p: proporción de estudiantes que reprueban el curso. Suponga que en un semestre particular los grupos eran de $m=10$ estudiantes y se ofrecieron 20 cursos. El registro de estudiantes que perdieron el curso indica que $\sum_1^{20} x_i = 60$. Encuentre una estimación para el MLE de $(1-p)^{10}$, es decir, para la probabilidad de que ninguno de los 10 estudiantes

de un curso cualquiera repruebe Estadística.

X = # de estudiantes de los m que reprueban el curso

$X \sim Bin(m, p)$ $\qquad$ $P(X=0) = \binom{10}{0} \cancel{(p)^0}(1-p)^{10}$

$= (1-p)^{10}$

Hallemos $\hat{p}$

1. $L(p)$

$$L(p) = \prod_{i}^{n} \binom{m}{x} p^{x} (1-p)^{m-x} = \prod_{i}^{n} \binom{m}{x} \cdot p^{\sum x_i} \cdot (1-p)^{nm-\sum x_i}$$

2. $\ell(p)$

$$\ell(p) = \ln\left(\prod_{i}^{n} \binom{m}{x}\right) + \sum x_i \ln(p) + (nm - \sum x_i)\ln(1-p)$$

3. ℓ_p

$$\ell_p = 0 + \frac{\sum x_i}{p} - \frac{nm - \sum x_i}{1-p}$$

4. $\ell_\theta = 0$

$$\frac{\sum x_i}{p} = \frac{nm - \sum x_i}{1-p} \Rightarrow (1-p)\sum x_i = pnm - p\sum x_i$$

$$\Rightarrow \sum x_i - \cancel{p\sum x_i} = pnm - \cancel{p\sum x_i}$$

$$p = \frac{\sum x_i}{nm}$$

$$P = \frac{60}{(20)(10)} = 0{,}3$$

$$P(X=0) = (1-P)^{10} = (0{,}7)^{10} = 0{,}028$$

2,8% de que reprueben

5. Sea $T_1, T_2, \ldots, T_n$ una M.a. de una distribución exponencial desplazada, es decir:

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(t-\theta)} & , t > \theta \\ 0 & , e.o.c \end{cases}$$

Suponga que se observan 10 valores para esta distribución = 3,11, 0.60, 2.55, 2.20, 5.44, 3.42, 10.39, 8.90, 17.89, 1.30

Asumiendo que $\theta = 0{,}5$, Obtenga EMV de λ

1. $L(\lambda)$

$$L(\lambda) = \prod_{i}^{n} \left(\lambda e^{-\lambda(t-\theta)}\right) = \lambda^n \cdot e^{-\lambda\Sigma(ti-\theta)}$$

2 $\ell(\lambda) =$

$$\ell(\lambda) = n\,Ln(\lambda) - \lambda\Sigma(t_i - n\theta)$$

3 ℓ_λ

$$\ell_\lambda = \frac{n}{\lambda} - \Sigma(t_i - n\theta)$$

4 $\ell_\lambda = 0$

$$\Sigma(t_i - n\theta) = \frac{n}{\lambda}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{n}{\sum (t_i - n\theta)}}$$

5. Verificamos

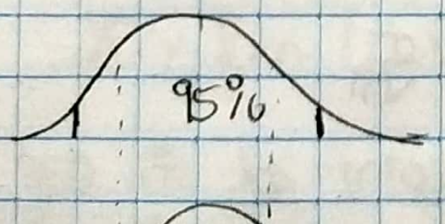
$$\ell_{\lambda\lambda} = -\frac{n}{\lambda^2} \quad \checkmark$$

$$\lambda = \frac{10}{\sum t_i - (10 \cdot 0,5)} = \frac{10}{55,84 - 5} = \boxed{0,1967}$$

TALLER 13

1. Suponga que se selecciona una muestra de 50 botellas de cerveza durante la semana universitaria y se determina el contenido de alcohol de estas. Sea μ el contenido promedio de alcohol de la población de todas las botellas estandarizadas. Suponga que en un intervalo de confianza del 95 % para μ es (7.8, 9.4).

a) ¿Un intervalo de confianza al 90 % calculado con esta muestra, hubiese resultado mas angosto o más ancho que el intervalo dado? Explique su respuesta.



Mas Angosto, ya que tiene menor confianza.

b) Considere la siguiente proposición. Existe 95% de posibilidades de que el μ este entre 7,8 y 9,4 ¿Es correcta esta proposición? ¿Por qué si o por qué no?

No es correcta debido a que el 95% no esta asociado a una probabilidad de que μ este entre 2 valores, lo que se debe decir es que con una confianza del 95% el verdadero valor de μ estará entre 7,8 y 9,4

c) Considere la siguiente proposición: Si el proceso de selección de una muestra de tamaño 50 y de cálculo del intervalo de 95% correspondiente se repite 100 veces, se espera que 95 de los intervalos resultantes incluyan a μ. ¿Es correcta esta proposición? ¿Por qué si o por qué no?

Es correcta, todo parte de la definición de intervalo

2. Considere un intervalo de confianza para la media μ de una población de la forma $\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma/\sqrt{n}$ ¿en cuanto se debe incrementar el tamaño de muestra n, si el ancho del intervalo de confianza anterior tiene que ser reducido a la mitad? Si el tamaño de muestra n se incrementa por un factor de 25, ¿qué efecto tendrá en el ancho del intervalo

- $\text{Ancho} = \left(\bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) - \left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

$\text{Ancho} = \underbrace{\boxed{2 z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}_{L_1}$ $\qquad N = ?$

$L_2 = \frac{L_1}{2}$

Scanned by CamScanner

$$2 Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{2}{\sqrt{N}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad (2\sqrt{n})^2 = (\sqrt{N})^2$$

$$\boxed{4n = N}$$

Si el intervalo se reduce a la mitad se debe cuadruplicar el tamaño de muestra

- $$\text{Ancho}_2 = 2 Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{25n}} = \frac{1}{5} \cdot \underbrace{\boxed{2 Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}_{L_1}$$

$$\text{Ancho}_2 = \frac{1}{5} L_1$$

Si el tamaño de muestra se aumenta con un factor de 25 el ancho del intervalo se reduce en una 5ta parte.

5. Considere los siguientes 1000 intervalos de confianza de 95% para μ, obtenidos de muestras aleatorias asociadas a la misma distribución de probabilidad y usando el mismo procedimiento. ¿Cuántos de estos 1000 intervalos espera que capturen el valor correspondiente de μ? ¿Cuál es la probabilidad de que entre 940 y 960 de estos intervalos contenga a μ?

X = # intervalos que contienen el verdadero valor de μ

$$X \sim Bin(n, P) \quad n = 1000 \quad P = 0.95$$

- 950 de los intervalos capturaran el verdadero valor de μ

$$E[X] = n \cdot P = 950 \qquad Var[X] = np(1-p) = 47.5$$

Aproximamos a la Normal.

$P(940 < X < 960)$

$$\left(\frac{960-950+1/2}{\sqrt{47,5}}\right)-\left(\frac{940-950-1/2}{\sqrt{47,5}}\right)$$

$\phi(1,5) - \phi(-1,5)$ | $P(940 < X < 960) = 0,86638$

$2\phi(1,5) - 1$ | La probabilidad de que entre 940 y 960 de los intervalos este μ es de 86,6 %

$2(0,93319) - 1$

4. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución Normal, con media μ y varianza $\sigma^2 = 4$. Considere los siguientes intervalos aleatorio para μ

$$\left(\bar{X}-\frac{3,6}{\sqrt{n}}, \bar{X}+\frac{2}{\sqrt{n}}\right) \quad \left(\bar{X}-\frac{5}{\sqrt{n}}, \bar{X}+\frac{3,6}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\left(\bar{X}-\frac{3,92}{\sqrt{n}}, \bar{X}+\frac{3,92}{\sqrt{n}}\right)$$

¿Cual de estos intervalos prefrere como estimacion de μ? Justifique su respuesta.

- Para $\left(\bar{X}-\frac{3,6}{\sqrt{n}}, \bar{X}+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)$ $Z_{\alpha_1} = \frac{3,6}{2}$, $Z_{\alpha_2} = 1$

$Z_{\alpha_1} = 1,8 \rightarrow \phi(1,8) = 1-\alpha_1 \rightarrow \alpha_1 = 1-0,96407$

$Z_{\alpha_2} = 1 \rightarrow \phi(1) = 1-\alpha_2 \rightarrow \alpha_2 = 1-0,84134$

$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$

$\alpha = 0,03593 + 0,15866$

$\alpha = 0,19459$

$100(1-\alpha)\% = \boxed{80,54\%}$

Longitud

$\text{Ancho} = \bar{x} + \frac{2}{\sqrt{n}} - \bar{x} + \frac{3,6}{\sqrt{n}}$

$\text{Ancho} = \boxed{\frac{5,6}{\sqrt{n}} = 2,8\,S}$

• Para $\left(\bar{x} - \frac{5}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{3,6}{\sqrt{n}}\right)$

$z\alpha_1 = \frac{5}{2} \quad z\alpha = \frac{3,6}{2}$

$z\alpha_1 = 2,5 \rightarrow \Phi(2,5) = 1 - \alpha_1 \rightarrow \alpha_1 = 1 - 0,99379$

$z\alpha_2 = 1,8 \rightarrow \Phi(1,8) = 1 - \alpha_2 \rightarrow \alpha_2 = 1 - 0,96407$

$\alpha = 0,00621 + 0,03593$

$\alpha = 0,042$

$100(1-\alpha)\% = \boxed{95,78\%}$

Longitud

$\text{Ancho} = \bar{x} + \frac{3,6}{\sqrt{n}} - \bar{x} + \frac{5}{\sqrt{n}}$

$\text{Ancho} = \boxed{\frac{8,6}{\sqrt{n}} = 4,3\,S}$

• Para $\left(\bar{x} - \frac{3,92}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{3,92}{\sqrt{n}}\right)$

$z\frac{\alpha}{2} = \frac{3,92}{2} = 1,96 \rightarrow \Phi(1,96) = 1 - \frac{\alpha}{2}$

$1 - 0,975 = \frac{\alpha}{2}$

$0,025 = \frac{\alpha}{2}$

$\alpha = 0,05$

$100(1-\alpha)\% = \boxed{95\%}$

Longitud

$\text{Ancho} = \boxed{\frac{7,84}{\sqrt{n}} = 3,92\,S}$

Scanned by CamScanner

TALLER (14)

1. Se sabe que la duracion, en horas, de un foco de 75 Watts tiene una desviacion estandar de $\sigma = 25$ horas. Se toma una muestra aleatoria de 40 focos, la cual resulto tener una duracion promedio de $\bar{X} = 1014$ horas.

a. Construya un intervalo de confianza bilateral del 95% para la duracion promedio

X = tiempo de duracion del foco en horas

$\sigma = 25$ horas $\quad \bar{X} = 1014$ horas

Sea $X_1, X_2, \dots X_{40}$ una M.A del tiempo de duracion de los 40 focos

$n = 40$

$n > 30 \Rightarrow$ Podemos usar

$$\bar{X} \pm Z(\alpha/2) \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$1 - \alpha = 0{,}95$

$\alpha = 0{,}05$

$$\boxed{\alpha = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}}$$

$\Rightarrow$ Simetrico

$$1014 \pm Z\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \frac{25}{\sqrt{40}}$$

$\alpha/2 = 0{,}025$

Area a la derecha

$\Phi(Z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

$\Phi(Z_{\alpha/2}) = 1 - 0{,}025$

$\Phi(Z_{\alpha/2}) = 0{,}975$

$$\boxed{Z_{\alpha/2} = 1{,}96}$$

I.C

$$\boxed{(1006.3\ ,\ 1021.7)}$$

Scanned by CamScanner

b. Construya un intervalo de confianza inferior del 95% para la duración del promedio

Tenemos que hallar un intervalo tipo

$$\left(-\infty, \bar{x} + z_{(1-\alpha)} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$\Phi(z_\alpha) = 1 - \alpha$ $\qquad$ $1 - \alpha = 0{,}95$

$\Phi(z_\alpha) = 0{,}95$ $\qquad$ $\alpha = 0{,}05$

$z_\alpha = 1{,}64$

$$\left(-\infty, 1014 + 1{,}64 \cdot \frac{25}{\sqrt{40}}\right)$$

$$\boxed{\left(-\infty, 1020{,}5\right)}$$

2. Sea $\bar{x}$ la media muestral de una muestra aleatoria de tamaño n, que tiene media μ y varianza $= 10 = \sigma^2$. Encuentre n tal que la probabilidad de que el intervalo $\left(\bar{x} - \frac{1}{2}, \bar{x} + \frac{1}{2}\right)$ incluya a μ sea aproximadamente de $0{,}954$.

$$P\left[\bar{x} - \frac{1}{2} < \mu < \bar{x} + \frac{1}{2}\right] = 0{,}954$$

$$P\left[-\frac{1}{2} \leq \bar{x} - \mu \leq \frac{1}{2}\right] = 0{,}954$$

$$P\left[-\frac{\sqrt{n}}{2} \leq \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{\sqrt{n}}{2}\right] = 0{,}954$$

$$P\left[-\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{10}} \leq \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{10}}\right] = 0{,}954$$

$$2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{10}}\right)-1=0{,}954 \qquad \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{10}}=2$$

$$\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{10}}\right)=0{,}977 \qquad (\sqrt{n})^2=(4\sqrt{10})^2$$

$$\Phi(w)=0{,}977 \qquad n=16\cdot 10$$

$$\boxed{n=160}$$

$w=2$

3. El número de amigas que debe conocer Brahian cada semana para poder reemplazar a su novia en la siguiente semana es una variable aleatoria Poisson, con λ desconocido. Durante el año pasado, Yeison, su mejor amigo se dio a la tarea de registrar el número de amigas que conoció Brahian en cada semana para elegir a su nueva novia

$$\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

Número de Amigas	1	2	3	4	5	6
Frecuencia	7	14	10	11	8	2

$= 52$

a. Construya un intervalo de confianza aproximado del 95% para λ. $n=54$

Recordemos que un EMV para λ es $\bar{x}$

$\bar{x}=3{,}09\simeq 3{,}1$

Recordemos de la dis Poisson

$$E[X]=\lambda=Var[\bar{x}]$$

Pero S en este caso es $\sqrt{\bar{x}}$

Intervalo de confianza es

$$\bar{X}\pm z_{(\alpha/2)}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}$$

Entonces

$$\bar{X}\pm z_{(\alpha/2)}\cdot\frac{\sqrt{\bar{x}}}{\sqrt{n}}$$

$1-\alpha = 0{,}95$

$1-0{,}95 = \alpha$

$\alpha = 0{,}05$

Al ser un intervalo Bilateral entonces

$\alpha = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}$

$\alpha/2 = 0{,}025$

$\Phi(z_{0,025}) = 1 - 0{,}025$

$\Phi(z_{0,025}) = 0{,}975$

$z_{0,025} = 1{,}96$

$3{,}1 \pm 1{,}96 \frac{\sqrt{3{,}1}}{\sqrt{52}}$

$3{,}1 \pm 0{,}4786$

Entonces el intervalo esta dado por

$\boxed{(2{,}62\ ,\ 3{,}58)}$

b. ¿Hay motivos para ~~pensar~~ creer que, Brahian conoce en promedio a más de 3 amigas por semana?

Contruyamos un intervalo del tipo $(\ell, +\infty)$ para verificar la hipotesis

$\ell = \bar{X} - z_\alpha \frac{\sqrt{\bar{X}}}{\sqrt{n}}$

$1-\alpha = 0{,}95$

$1-0{,}95 = \alpha$

$\alpha = 0{,}05$

$\Phi(z_{0,05}) = 1 - 0{,}05$

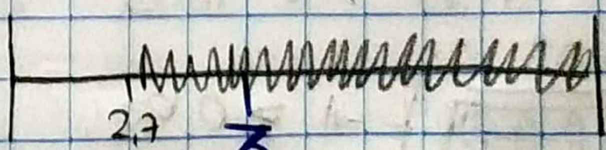
$\Phi(z_{0,05}) = 0{,}95$

$z_{0,05} = 1{,}645$

$\ell = 3{,}1 - 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{3{,}1}{52}}$

$\ell = 2{,}69 \simeq 2{,}7$

$(2{,}7\ , +\infty)$



No existe evidencia para afirmar que Brahian conoce en promedio más de 3 amigas x week

4. De 1000 casos de cáncer pulmonar seleccionados al azar, 823 son de pacientes que fallecieron. Construya un intervalo de confianza bilateral del 95% para la proporción de muertes de personas con cáncer pulmonar. ¿Cuán grande debe ser el tamaño de muestra para tener una confianza de al menos el 95% de que el error absoluto al estimar la proporción de muertes de personas con cáncer pulmonar sea menor de 0,03?

$1-\alpha = 0,95$

$1-0,95 = 0,05$

Intervalo Bilateral

$\alpha = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}$

$\alpha/2 = 0,025$

$\Phi(Z_{0,025}) = 1-\alpha$

$\Phi(Z_{0,025}) = 0,975$

$Z_{0,025} = 1,96$

$Z_{\alpha/2} = 1,96$

$\hat{X} \sim Bin(n, p)$

$n = 1000$ p = Desconocido

$\hat{p} = \frac{823}{1000} = 0,823$

$\hat{p} \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$

Tenemos que hallar

$P(|\hat{p}-p| < 0,03)$

$$P\Bigg(\underbrace{\frac{|\hat{p}-p|}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n^*}}}}_{\to Z} < \frac{0,03}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n^*}}}\Bigg) \geq 0,95$$

$$P\left(|Z| < \frac{0,03}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n^*}}}\right) \geq 0,95$$

$$2\Phi\Bigg(\underbrace{\frac{0,03}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n^*}}}}_{w}\Bigg) - 1 \geq 0,95$$

$\Phi(w) \geq 0,975$

$w \geq 1,96$

$$\frac{0,03}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n^*}}} \geq 1,96$$

$$\frac{\sqrt{n^*}\,0,03}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}} \geq 1,96$$

Scanned by CamScanner

$$(\sqrt{n^*})^2 \geq \left(\frac{1{,}96\,(\sqrt{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})})}{0{,}03}\right)^2$$

$$n^* \geq \left(\frac{1{,}96\cdot\sqrt{(0{,}823)(0{,}177)}}{0{,}03}\right)^2$$

$$n \geq 621{,}8 \Rightarrow 622$$

El tamaño minimo requerido para un error absoluto inferior a 0,03 sera $\boxed{622}$

---

(81) Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución $N(\mu, \sigma^2)$ donde μ y σ son desconocidas. Considere el siguiente intervalo aleatorio $(\bar{X} - 0{,}2\sigma, \bar{X} + 0{,}2\sigma)$. EL tamaño de muestra minimo para que la probabilidad de que este intervalo contenga a μ sea almenos 95%

$$P(\bar{X} - 0{,}2\sigma < \mu < \bar{X} + 0{,}2\sigma) \geq 0{,}95$$

$$P(-0{,}2\sigma < \bar{X} - \mu < 0{,}2\sigma) \geq 0{,}95$$

$$P\left(-0{,}2\sqrt{n} < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < 0{,}2\sqrt{n}\right) \geq 0{,}95$$

$$P(-0{,}2\sqrt{n} < Z < 0{,}2\sqrt{n}) \geq 0{,}95$$

$$2\Phi(0{,}2\sqrt{n}) - 1 \geq 0{,}95$$

$$\Phi(0{,}2\sqrt{n}) \geq 0{,}975$$

$$\Phi(w) \geq 0{,}975$$

$$w \geq 1{,}96$$

$$1{,}96 \leq 0{,}2\sqrt{n}$$

$$(\sqrt{n})^2 \geq \left(\frac{1{,}96}{0{,}2}\right)^2$$

$$n \geq 96{,}04$$

$$\boxed{n = 97}$$

82) En cierta Ciudad el alcalde cree que más del 30% de los ciudadanos está de acuerdo en usar fondos públicos para ~~[illegible]~~ solventar abortos. Para verificar se toma una muestra aleatoria de 1000 ciudadanos y se registra que 396 estaban de acuerdo con usar fondos públicos para solventar abortos. Un intervalo de confianza al 95% para P, la proporción de ciudadanos en la ciudad de acuerdo con el uso de dichos fondos, permite concluir que:

$\hat{P} = \frac{396}{1000} = 0,396$ $Bin \sim (n, P)$

IC

$1 - \alpha = 0,95$ | $\alpha/2 = 0,025$

$1 - 0,95 = \alpha$

$\hat{P} \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}$ $\alpha = 0,05$ | $\Phi(Z_{0,025}) = 1 - \alpha$

$\alpha = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}$ | $\Phi(Z_{0,05}) = 0,975$

$0,396 \pm 1,96 \sqrt{\frac{0,396(1-0,396)}{1000}}$ | $Z_{\alpha/2} = 1,96$

$(0.3657 \ , 0.4263)$

a. $0,3 < P < \cancel{0,4}$
b. $P \leq \cancel{0},38$
c. ~~El Alcalde está equivocado~~
d. $\boxed{P > 0,3}$ ✓

83) Una muestra aleatoria de 110 relámpagos en cierta región dieron como resultado una duración de eco de radar promedio de 0,81 segundos y una desviación estándar de 0,34 segundo. Si μ representa la duración media del eco de radar de dichos relámpagos en esa región, un intervalo de confianza aproximado al 98% para μ permite concluir que

Utilizamos

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$0,81 \pm 2,33 \cdot \frac{0,34}{\sqrt{110}}$$

$(0{,}7345 \;,\; 0{,}8855)$

a. $\mu < 0,75$
b. $\mu > 0,75$
c. $\mu \geq 0,70$
d $\mu \geq 0,70$ ✓

0,7 0,73 0,75

$1-\alpha = 0,98$
$1-0,98 = \alpha$
$\alpha = 0,02$
Bilateral
$\alpha = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}$

$\alpha/2 = 0,01$

$\Phi(z_{\alpha/2}) = 1-0,01$
$\Phi(z_{\alpha/2}) = 0,99$
$z_{\alpha/2} = 2,33$

(34) Se desea comparar dos metodos de capacitacion para obreros en una operacion de ensamble. Se cree que el nuevo método reduce el tiempo medio para los obreros en la operacion de ensamble, en comparacion con el metodo tradicional. Para verificarlo se consideran dos grupos de obreros los cuales son sometidos a la capacitacion por 3 semanas, unos usando el metodo tradicional y otros con el nuevo. Al final se registran los tiempos requeridos para realizar el ensamble en cada uno de los obreros. Los resultados son los siguientes

T. muestra

a)

TRADICIONAL	$n=9$	$\bar{x} = 35,22$	$S_1 = 4,944$	$\mu_1 \; \sigma_1^2$
NUEVO	$m=9$	$\bar{y} = 31,56$	$S_2 = 4,475$	$\mu_2 \; \sigma_2^2$

I. Por experiencia se sabe que dichos tiempos se distribuyen normalmente. Si se asume que $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, un intervalo de confianza al 95% para $\mu_1 - \mu$

Scanned by CamScanner

Utilizamos

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \pm t_{\frac{\alpha}{2},v} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$$

$$V = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)}{n_2 - 1}} = \frac{\left(\frac{S_1^2 + S_2^2}{9}\right)^2}{\frac{\frac{(S_1^2)^2}{81} + \frac{(S_2^2)^2}{81}}{8}}$$

$1 - \alpha = 0,95$

$1 - 0,95 = \alpha$

$\alpha = 0,05$

$\alpha = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}$

$\frac{\alpha}{2} = 0,025$

$V = 2,08 \simeq 2,1 \simeq 16$

$t_{0,025,3} = 3,182 \quad 2,120$

$$35,22 - 31,56 \pm 3,182 \sqrt{\frac{44,468761}{9}}$$

$3,66 \pm 7,073$

$(-3,413 \,,\, 10,773)$ → El intervalo contiene al cero por tanto $\mu_1 \simeq \mu_2$

$(-1,05 \,,\, 8,3723)$

II. Por experiencia se sabe que dichos tiempos se distribuyen normalmente. Si se asume que $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ un intervalo de confianza al 95% para $\mu_1 - \mu_2$ permite concluir que

Utilizamos

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \pm t_{\alpha/2,\,(n_1+n_2)-2}\, S_P \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

$1 - \alpha = 0,95$ $\qquad n_1 + n_2 - 2 = \boxed{16}$

$\alpha = 0,05$

$\frac{\alpha}{2} = 0,025$ $\qquad t_{\frac{\alpha}{2},16} = 2,120$

$$SP = \sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}} = \sqrt{\frac{8(4,949)^2 + 8(4,475)^2}{16}}$$

$SP = 4,71$

$$35,22 - 31,56 \pm (2,120)(4,71)\frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$3,66 \pm 4,7071$$

$(-1,0471,\ 8,3671) \rightarrow$ El intervalo contiene al cero por tanto se dice $\mu_1 = \mu_2$

b)

	Tamaño muestra				
TRADICIONAL	$n = 40$	$\bar{x} = 35,22$	$S_1 = 4,949$	μ_1	σ_1^2
NUEVO	$m = 36$	$\bar{y} = 31,56$	$S_2 = 4,475$	μ_2	σ_2^2

Un intervalo de confianza al 95% para $\mu_1 - \mu_2$ permite concluir

Utilizamos

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$$

$1 - \alpha = 0,95$

$1 - 0,95 = \alpha$

$\alpha = 0,05$

$\alpha = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}$

$\frac{\alpha}{2} = 0,025$

$\Phi(Z_{\alpha/2}) = 1 - 0.025$

$\Phi(Z_{\alpha/2}) = 0,975$

$Z_{\alpha/2} = 1,96$

$$35,22 - 31,56 \pm 1,96 \sqrt{\frac{(4,944)^2}{40} + \frac{(4.475)^2}{36}}$$

$$3,66 \pm 1,96 \cdot 1,080437764$$

$$3,66 \pm 2.117658017$$

$(1,54\ ,\ 5.78) \rightarrow$ El intervalo no contiene al cero y se encuentra a la derecha por tanto $\mu_1 > \mu_2$

(85) Sea $X_1, \dots, X_n$ una muestra aleatoria de una población con una distribución dada por

$$f(x) = (\alpha+1)\,x^{\alpha}\ ,\ 0 < x < 1\ ,\ \text{con}\ \alpha > 0$$

Sea $\theta = P(X < 1/2)$. El estimador de máxima verosimilitud para θ es:

1 Hallamos $L(\alpha)$

$$L(\alpha) = \prod_i^n f(x) = (\alpha+1)\,x_1^{\alpha} \cdot (\alpha+1)\,x_2^{\alpha} \cdot (\alpha+1)\,x_n^{\alpha}$$

$$= (\alpha+1)^n \cdot \prod_i^n x_i^{\alpha}$$

2 Hallamos $\ell(\alpha)$

$$\ell(\alpha) = n \ln(\alpha+1) + \alpha \cdot \sum \ln(x_i)$$

3. Hallamos $\ell_{\alpha}(\alpha)$

$$\ell_{\alpha} = \frac{n}{\alpha+1} + \sum \ln(x_i)$$

4 Igualamos a cero $\ell_\alpha = 0$

$$\left(\frac{-n}{\sum \ln(x_i)}\right) - 1 = \alpha$$

$$\int_0^{1/2} (\alpha+1)\, x^{\alpha}\, dx = x^{(\alpha+1)}\Big|_0^{1/2}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{-n}{\sum \ln(x_i)}\right)\cancel{-1}\cancel{+1}}$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{-n}{\sum \ln(x_i)}\right)}}$$

86) Sea $X_1, \ldots X_n$ una muestra aleatoria de una poblacion con distribucion de probabilidad dada por

$$f(x) = \frac{x}{\beta^2} e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)}, \quad x > 0, \; \beta > 0$$

El estimador de maxima verosimilidad para β es

1 $L(\beta)$

$$L(\beta) = \prod^n f(x) = \left(\frac{x_1}{\beta^2} e^{-\left(\frac{x_1}{\beta}\right)}\right) \cdot \left(\frac{x_2}{\beta^2} e^{-\left(\frac{x_2}{\beta}\right)}\right) \cdot \left(\frac{x_n}{\beta^2} e^{-\frac{x_n}{\beta}}\right)$$

$$= \frac{1}{\beta^{2n}} \prod x_i \cdot e^{-\frac{1}{\beta}\sum x_i}$$

2 $\ell(\beta)$

$$\ell(\beta) = \sum \ln(x_i) - 2n \ln(\beta) - \frac{1}{\beta} \sum x_i$$

3. $\ell_\beta(\beta) = 0 - 2n + \frac{1}{\beta^2}\sum x_i$

4. $\ell_\beta(\beta) = 0$

$$\frac{2n}{\beta} = \frac{1}{\beta^2}\sum x_i \Rightarrow \beta = \frac{\sum x_i}{2n} \Rightarrow \boxed{\beta = \frac{\bar{x}}{2}}$$

87) Se tiene una muestra aleatoria de tamaño 16 de una distribución normal con media μ y desviación estándar $\sigma = 1$. De los siguiente intervalos aleatorios para μ, el de mayor cobertura es

Mayor cobertura = Mayor %

Para a

$$(\bar{x} - 0{,}49 \, , \, \bar{x} + 0{,}5825)$$

$$P(\bar{x} - 0{,}49 < \mu < \bar{x} + 0{,}5825)$$
$$P(-0{,}49 < \mu - \bar{x} < 0{,}5825)$$
$$P(-0{,}5825 < \bar{x} - \mu < 0{,}49)$$
$$P\left(4(-0{,}5825) < \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < (0{,}49)4\right)$$

$$P(-2{,}33 < z < 1{,}96)$$

$$\Phi(1{,}96) - \Phi(-2{,}33)$$
$$0{,}975 + 0{,}99 - 1$$
$$0{,}965 = \boxed{96{,}5\%}$$

Para b

$$P\left(\bar{x} - \frac{1}{5} \leq \mu \leq x + \frac{1}{5}\right)$$

$$P(-1/5 \leq \bar{x} - \mu \leq +1/5)$$
$$P\left(-4/5 \leq \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq 4/5\right)$$

$P(-4/5 \le Z \le 4/5)$ | Para c

$= 2\Phi(4/5) - 1$ | $(\bar{X} - 0.49, \bar{x} + 0.49)$

$= 2(0,788145) - 1$ | $= P(\bar{X} - 0,49 < M < \bar{X} + 0.49)$

$= 0,58 = 58\%$ | $= P(-0,49 \le \bar{X} - M \le 0.49)$

| $= P(4(-0,49) \le \frac{\bar{X} - M}{\sigma/\sqrt{n}} \le 4(0,49))$

| $2\Phi(1,96) - 1 = 0.95 = 95\%$

Para d

$(\bar{X} - 0,4375, \bar{x} + 0,6425)$

$P(\bar{x} - 0,4375 \le M \le \bar{X} + 0,6425)$

$P(-0.6425 \le \bar{X} - M \le 0,4375)$

$P((4)(-0,6425) \le \frac{\bar{X} - M}{\sigma/\sqrt{n}} \le (4)(0,4375))$

$P(-2,57 \le Z \le 1,75)$

$\Phi(1,75) - \Phi(-2,57)$

$\Phi(1,75) + \Phi(2,57) - 1$

$0,959941 + 0,994915 - 1 = 0,955 = 95,5\%$

88) Se cree que de todos los nacimientos en cierto centro médico de madres con peso normal no fumadoras, más del 7% son niños con bajo peso. De una muestra aleatoria de 500 madres con peso normal y no fumadoras, se registró que 40 de los nacimientos eran de niños con bajo peso. Un intervalo de confianza al 95% para la proporción P de nacimientos en dicho centro médico, que son niños de bajo peso permite concluir que:

$n = 500$ $\hat{P} = \frac{40}{500} = 0,08$

Scanned by CamScanner

Utilizamos

$$\hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

$$0.08 \pm 1{,}96\sqrt{\frac{0.08 \cdot 0.92}{500}}$$

$$0{,}08 \pm 0{,}024$$

| 0,05 0,056 0,07 |

$(0{,}056\,,\; 0{,}104) \rightarrow$ Se puede concluir entonces que $P > 0{,}05$

$1-\alpha = 0{,}95$
$\alpha = 0{,}05$
$\alpha = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}$
$\alpha/2 = 0{,}025$
$\Phi(z_{\alpha/2}) = 1 - 0{,}025$
$\Phi(z_{\alpha/2}) = 0{,}975$
$z_{\alpha/2} = 1{,}96$

89) A cada uno de los n especímenes de cierto material se le registró la resistencia a la tención en (Klb/Plg2). Si la desviación estándar de las resistencias es de 4.59 (Klb/Plg2) y μ es la resistencia media de dicho material, el tamaño de muestra mínimo para que la precisión de un intervalo de confianza bilateral al 95% para μ sea inferior a 0.5 es

$1-\alpha = 0{,}95$
$1-0{,}95 = \alpha$
$\alpha = 0{,}05$
$\frac{\alpha}{2} = 0{,}025$

$\Phi(z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$
$\Phi(z_{\alpha/2}) = 1-0{,}025$
$\Phi(z_{\alpha/2}) = 0{,}975$

$$\boxed{z_{\alpha/2} = 1{,}96}$$

$$n \geq \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\right)^2 \rightarrow \quad n \geq \left(\frac{1{,}96 \cdot 4.59}{0.5}\right)^2$$

$n \geq 323.74$ Por tanto el tamaño mínimo para que la precisión de un IC bi al 95 para μ inferior a 0.5 es $\boxed{324}$

90) Se desea estudiar la capacidad de individuos para caminar en línea recta. Se toma una muestra aleatoria de 20 hombres saludables y a cada uno se le registra la cadencia (pasos por segundo en línea recta). Los datos obtenidos son: 0,95; 0,85; 0,92; 0,95; 0,93; 0,86; 1,0; 0,92; 0,85; 0,81; 0,78; 0,93; 0,93; 1,05; 0,93; 1,06; 1,06; 0,96; 0,81; 0,96. La experiencia indica que dichas mediciones son normales con media μ y desviación estándar σ. Un intervalo de confianza al 95% para μ es

$n=20$ $\quad X \sim n(\mu, \sigma^2)$ $\quad \sigma^2 =$ Desconocido

Usamos $\bar{X} \pm t_{\alpha/2, n-1} \dfrac{S}{\sqrt{n}}$

$1-\alpha = 0,95$

$\alpha = 0,05$ $\quad \bar{X} = 0,9255$ $\quad t_{0,025,19} = 2,093$

$\dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$S = 0,081$

$v = 19$

$\boxed{(0.8875, 0.9634)}$ ✓

91) Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una normal $n(\mu, \sigma^2)$, con σ^2 desconocida. Un intervalo de confianza al 95% para μ.

$X \sim n(\mu, \sigma^2)$ $\quad \sigma^2 =$ Desconocida

Usamos

$\bar{X} \pm t_{\alpha/2, n-1} \dfrac{S}{\sqrt{n}}$

$1-\alpha = 0,95$

$\alpha = 0,05$

$\dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$\boxed{\bar{X} \pm t_{\frac{\alpha}{2}(n-1)} \cdot \dfrac{S}{\sqrt{n}}}$ No importa el valor de n porque es dis. normal

92) Se tiene la hipotesis de que las calificaciones del SAT en matematicas para estudiantes de preparatoria, difieren dependiendo del campo de estudio. Se selecciona de manera aleatoria 45 estudiantes que deseaban especializarse en ingenieria y 35 en idiomas y literatura, y se registran sus puntajes en la prueba SAT en el área de matematicas. Los resultado se muestran a continuacion.

Especialidad	Tam Muestral	Media Muestral	Desv estandar Muestral	Media	Varianza
Ingenieria	$n = 45$	$\bar{x} = 548$	$S_1 = 57$	μ_1	σ_1^2
Idiomas y Literatura	$m = 35$	$\bar{y} = 517$	$S_2 = 52$	μ_2	σ_2^2

Un intervalo de confianza al 95% para $\mu_1 - \mu_2$ permite concluir que:

Distribucion no normal con $n, m \geq 30$ y σ_1^2, σ_2^2 desconocidas

Utilizamos

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$$

$1 - \alpha = 0,95$

$1 - 0,95 = \alpha$ $\qquad \Phi(Z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$

$\alpha = 0,05$ $\qquad \Phi(Z_{\alpha/2}) = 1 - 0,025$

$\frac{\alpha}{2} = 0,025$ $\qquad \Phi(Z_{\alpha/2}) = 0,975$

$$\boxed{Z_{\alpha/2} = 1,96}$$

$(7.038, 54.961)$ ⟶ No contiene al cero por tanto existe evidencia con un 95% de confianza para afirmar que $\boxed{\mu_1 > \mu_2}$

93) Se tiene una muestra aleatoria de tamaño 16 de una distribucion normal con media μ y desviacion estandar $\sigma = 1$. De los siguientes intervalos aleatorios para μ el de mayor precision es:

Analisamos la longitud de cada intervalo el de menor longitud sera el mas preciso

Para a

$$\cancel{\bar{X}} + \frac{1}{5} - \cancel{\bar{X}} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5} = 0.4 \rightarrow$$

Este es el intervalo mas preciso por que su longitud es la menor
$(\bar{X} - 1/5, \bar{X} + 1/5)$

Para b

$$\cancel{\bar{X}} + 0{,}49 - \cancel{\bar{X}} + 0{,}49 = 0.98$$

Para c

$$\cancel{\bar{X}} + 0{,}6425 - \cancel{\bar{X}} + 0{,}4375 = 1.08$$

Para d

$$\cancel{\bar{X}} + 0{,}5825 - \cancel{\bar{X}} + 0{,}49 = 1.0725$$

94) Se selecciono una muestra aleatoria de 539 familias de una ciudad y se encontro que 133 de estas poseian al menos un arma de fuego. Si P es la proporcion de familias en dicha ~~ciudad~~ ciudad con al menos una arma de fuego, un intervalo de confianza al 95% para P permite concluir

Utilizamos $\hat{P} \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}$

$$\hat{P} = \frac{133}{539} = 0{,}25$$

$$0{,}25 \pm 1.96 \sqrt{\frac{0{,}25(1-0{,}25)}{539}}$$

$$(0.2134, 0.2865)$$

El IC con un 95% de confiabilidad permite concluir que

"Mas del 20% de las familias tienen al menos un arma de fuego"

(95) A una muestra de 22 placas de base de acero Maraging con 18% de niquel, se les midio la tenacidad a la fractura. Los datos registrados son 69,5; 71,9; 72,6; 73,1; 73,3; 73,5; 75,5; 75,7; 75,8; 76,1; 76,2; 77,0; 77,9; 78,1; 79,6; 79,7; 79,9; 80,1; 82,2; 83,7; 93,7. Asumiendo que las mediciones de tenacidad a la fractura son normales con media μ y desviación estandar σ. Un intervalo de confianza al 98% para μ es

$n = 22$ $\quad X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\quad$ IC 98%

↳ utilizamos

$$\bar{X} \pm t_{\alpha/2,(n-1)} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$\bar{X} = 77,33$
$S = 5,04$

$1 - \alpha = 0,98$ $\quad t_{\alpha/2,(21)} = 2,518$
$1 - 0,98 = \alpha$
$\alpha = 0,02$
$\frac{\alpha}{2} = 0,01$

$$\boxed{(74{,}624 \,,\, 80{,}036)}$$

(96) A una muestra aleatoria de 13 animales sanos se les registra, se les registro el volumen de distribución ajustado. Los datos registrados son: 23, 39, 40, 41, 43, 47, 51, 58, 63, 66, 67, 69, 72. Se sabe que estas mediciones se distribuyen normalmente con media μ y desviación estandar σ. Un intervalo de confianza al 95% para μ es

$n = 13$ $\quad X \sim n(\mu, \sigma^2)$ $\quad$ IC 95%
σ^2 = desconocida

↳ Utilizamos

$$\bar{X} \pm t_{\alpha/2,(n-1)} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$\bar{X} = 52,23$
$S = 14,85$

$1-\alpha = 0,95$ $\qquad t_{0,025}(12) = 2,179$
$\alpha = 0,05$
$\frac{\alpha}{2} = 0,025$

$$\boxed{(43,26 \,,\, 61,205)}$$

97) El Superintendente de un gran distrito escolar llevo el registro de ausencia de maestros en 50 días de labores. El reporte indica que en promedio hay 1,8 maestros ausentes por día. Un intervalo de confianza aproximado al 95% para el promedio de ausencias es

$n = 50$ $\qquad$ # de ausentes en días
↳ Distribución Poisson

$$X \sim Poiss(\lambda) \qquad \hat{\lambda} = 1,8 = \bar{X} = Var[X]$$

Entonces Utilizamos

$$\bar{X} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$1,8 \pm 1,96 \cdot \frac{\sqrt{1.8}}{\sqrt{50}}$$

↳ $\boxed{(1.43 \,,\, 2.17)}$

98) Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población con distribución

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda(x-\theta)}$$

$x \geq \theta$
$\lambda, \theta > 0$
θ Conocido

El EMV para λ es:

1. $L(\lambda)$

$$L(\lambda) = \prod_{1}^{n} f(x) = \left(\lambda e^{-\lambda(x_1-\theta)}\right)\left(\lambda e^{-\lambda(x_2-\theta)}\right)\left(\lambda e^{-\lambda(x_n-\theta)}\right)$$

$$= \lambda^n e^{-\lambda \sum_{1}^{n}(x_i-\theta)}$$

$$= \lambda^n e^{-\lambda \sum x_i - \theta n}$$

2. $\ell(\lambda)$

$$\ell(\lambda) = n \ln(\lambda) - \lambda(\sum x_i - \theta n)$$

3. $\ell_\lambda(\lambda)$

$$\ell_\lambda(\lambda) = \frac{n}{\lambda} - \sum x_i + \theta n$$

4 $\ell_\lambda(\lambda) = 0$

$$\sum x_i - \theta n = \frac{n}{\lambda}$$

$$\lambda = \frac{n}{\sum x_i - \theta n} = \frac{n}{n} \cdot \frac{1}{\frac{\sum x_i}{n} - \theta}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{1}{\bar{X} - \theta}}$$

99) De una muestra aleatoria de mil casas en cierta ciudad, se encontró que 228 cocinaban con gas. Se desea estimar la proporción de casas en toda la ciudad que cocinan con gas. Suponiendo que $\hat{p}$ se mantiene constante, el tamaño de muestra mínimo para que la precisión de un IC aproximado al 95% para p sea inferior a 0,02 es

$$1-\alpha = 0,95$$
$$\alpha = 1-0,95$$
$$\alpha = 0,05$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0,025$$

$$\Phi(z_{\alpha/2}) = 1-\frac{\alpha}{2}$$
$$\Phi(z_{\alpha/2}) = 0,975$$

$$\boxed{z_{\alpha/2} = 1,96}$$

$$\hat{p} = \frac{228}{1000} = 0,228$$

Usamos

$$n \geq \left(z_{\alpha/2} \frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\epsilon} \right)^2$$

$$n \geq \left(1.96 \frac{\sqrt{0,228(1-0,228)}}{0,02} \right)^2$$

$$n \geq 1690,5$$

$\boxed{\text{El tamaño mínimo de } n \text{ es } 1691}$

Scanned by CamScanner

(100) Un estudio anterior en cierta ciudad mostró que el 50% de los potenciales electores estaba de acuerdo con usar fondos de la ciudad para solventar abortos. Sea p la proporción actual de potenciales electores que están de acuerdo con usar fondos de la ciudad para solventar abortos. El tamaño de muestra mínimo para que el ancho de un intervalo de confianza al 95% para p sea inferior o igual a 0,1 es

$$1-\alpha = 0{,}95 \qquad \frac{\alpha}{2} = 0{,}025$$

$$\alpha = 1-0{,}95$$

$$\alpha = 0{,}05 \qquad \Phi(z_{\alpha/2}) = 1-0{,}025$$

$$\Phi(z_{\alpha/2}) = 0{,}975$$

$$\hat{p} = 0{,}5 \qquad z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$p - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \qquad p \qquad p + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

Ancho $\leq 0{,}1$

Ancho del intervalo

$$\cancel{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} - \cancel{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

$$2\, z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq 0{,}1 \qquad \sqrt{n} \geq \frac{1{,}96 \cdot 0{,}5}{0{,}05}$$

$$z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq 0{,}05 \qquad n \geq \left(\frac{1{,}96 \cdot 0{,}5}{0{,}05}\right)^2$$

$$1{,}96\ \frac{0{,}5}{\sqrt{n}} \leq 0{,}05 \qquad n \geq 384{,}16$$

Entonces el n mínimo es $\boxed{385}$

Si preguntan por ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ n mínimo para que la precisión sea ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ inferior a E: usar:

$$n \geq \left(Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{E} \right)^2$$

Si preguntan por n mínimo para que el tamaño del intervalo sea inferior a E usar

~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~

$$n \geq \left(Z_{\alpha/2} \frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{E/2} \right)^2$$

(101) Sea $X_1, \dots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución Poisson, con parámetro λ desconocido. Sea $\theta = P(X_i = 2)$. El EMV para θ es

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x}}{x!}$$

① Hallemos $L(\lambda)$

$$L(\lambda) = \prod_{1}^{n} f(x) = \left(\frac{e^{-\lambda} \lambda^{x_1}}{x_1!} \right) \cdot \left(\frac{e^{-\lambda} \lambda^{x_2}}{x_2!} \right) \cdot \left(\frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{x_n}}{x_n!} \right)$$

$$L_n(\lambda) = \frac{e^{-\lambda n} \lambda^{\Sigma x_i}}{\Pi (x_i!)}$$

② $\ell(\lambda)$

$$\ell(\lambda) = -\lambda n + \Sigma x_i \ln(\lambda) - \ln\left(\Pi (x_i!)\right)$$

Scanned by CamScanner

$$\ell(\lambda) = -\lambda n + \sum x_i \cdot \ln(\lambda) - \sum \overset{\ln}{(x_i!)}$$

3. $\ell_\lambda(\lambda)$

$$= \ell_\lambda(\lambda) = -n + \frac{\sum x_i}{\lambda}$$

4. $\ell_\lambda(\lambda) = 0$

$$n = \frac{\sum x_i}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{\sum x_i}{n}$$

$$\boxed{\lambda = \bar{X}}$$

$$\theta = P(X_i = 2)$$

Entonces

$$\boxed{\theta = \frac{e^{-\bar{X}} \bar{X}^2}{2!}}$$

(102) Sea $X_1, \ldots X_n$ una M.A de una distribucion Lognormal con parametros μ conocida y σ^2 desconocido el ~~estimador~~ EMV para σ^2 es

$$f(x) = \frac{1}{x \sigma \sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{\ln[x-\mu]^2}{2\sigma^2}}$$

$$\text{Var}[X] = e^{2\mu + \sigma^2} \cdot (e^{\sigma^2} - 1)$$

① $L(\sigma)$

$$L(\sigma) = \prod_{i}^{n} f(x) = \frac{1}{(\pi x_i)(\sigma\sqrt{2\pi})^{n}} e^{-\frac{\sum_{i}^{n} \ln(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

② $l(\sigma)$

$$l(\sigma) = -\sum \ln(x_i) - n \ln(\sigma\sqrt{2\pi}) - \frac{\sum \ln(x-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

$$l(\sigma) = -\sum \ln(x_i) - n[\ln(\sigma) + \ln(\sqrt{2\pi})] - \frac{\sum \ln(x-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

③ $l_\sigma(\sigma)$

$$l_\sigma(\sigma) = -0 - \frac{n}{\sigma} + \frac{\sum_{i}(\ln x_i - \mu)^2}{\sigma^3}$$

④ $l_\sigma(\sigma) = 0$

$$\frac{n}{\sigma} = \frac{\sum(\ln(x_i)-\mu)^2}{\sigma^3}$$

$$\boxed{\sigma^2 = \frac{\sum(\ln(x_i)-\mu)^2}{n}}$$

Taller ⑮

1. El contenido de nueve contenedores similares de ácido clorhídrico en litros es el siguiente 9.3, 10.4, 9.5, 13.2, 9.1, 10.7, 11.2, 9.5, 10.3. Encuentre un intervalo de confianza al 95% para la media de todos los contenedores suponiendo una distribución normal

$\bar{X} = 10,35$ $\sigma^2 =$ Desconocido,

$S = 1,28$

Utilizamos

$$\bar{X} \pm t_{\alpha/2, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$1-\alpha = 0,95$

$\alpha = 0,05$

$\frac{\alpha}{2} = 0,025$

$n = 9$

$$10,36 \pm 2,306 \cdot \frac{1,28}{\sqrt{9}}$$

$t_{0,025, 8} = 2,306$

$(9,38 \ , \ 11,34)$ Con una confianza del 95% el intervalo contiene a μ

2. En dos ciudades A y B se llevó a cabo una encuesta con el fin de conocer el gasto promedio en gasolina en familias constituidas por 3 personas. De cada ciudad, se seleccionó aleatoriamente una muestra de 20 familias y se observaron sus gastos semanales en gasolina. Los datos obtenidos son los siguientes:

$\bar{X}_A = 82$ $\quad S_A = 15$

$\bar{X}_B = 50$ $\quad S_B = 10$

Suponiendo que los gastos semanales distribuyen normalmente con varianzas diferentes, ¿hay evidencia que apoye la afirmación de que el gasto promedio en gasolina semanal de las familias de la ciudad A es mayor al gasto promedio en gasolina semanal de las familias de la ciudad B?. Utilice un nivel de confianza del 90%

$n_A = 20$ $\quad X_A \sim N(\mu_A, \sigma_A^2)$

$n_B = 20$ $\quad X_B \sim N(\mu_B, \sigma_B^2)$ $\quad \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$

σ_A^2, σ_B^2 Desconocidas

Entonces usamos

$$\bar{X}_A - \bar{X}_B \pm t_{\alpha/2, v} \sqrt{\frac{S_A^2}{n_A} + \frac{S_B^2}{n_B}}$$

$$V = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}} \qquad \frac{\left(\frac{225}{20} + \frac{100}{20}\right)^2}{\frac{\left(\frac{225}{20}\right)^2}{19} + \frac{\left(\frac{100}{20}\right)^2}{19}}$$

$$V = \frac{264{,}0625}{\frac{126{,}5625}{19} + \frac{25}{19}} = \frac{264{,}0625}{7{,}97697368a} = 33{,}1$$

$$\boxed{V = 33}$$

$1 - \alpha = 0{,}90$

$1 - 0{,}90 = \alpha$

$\alpha = 0{,}1$

$\frac{\alpha}{2} = 0{,}05$

$t_{0{,}05,33} = 1{,}692$

$$82 - 50 \pm 1{,}692 \sqrt{\frac{225}{20} + \frac{100}{20}}$$

$(25{,}17\ ,\ 38{,}82)$ El intervalo no contiene al cero, Así que hay evidencia suficiente para afirmar que $\mu_A > \mu_B$, es decir que el gasto promedio semanal de la ciudad A es mayor al de B

3. En un grupo de investigación de la universidad desean determinar si existe una diferencia real entre los niveles de glucosa en la sangre de pacientes diabéticos tipo 1 al realizar el tratamiento con el uso de bombas de insulina y con el tratamiento tradicional consistente en la aplicación de inyecciones. Para ello, un paciente se pone a prueba durante 24 días, 12 de los cuales se tratan con inyecciones manuales y los otros 12 con la bomba de insulina, y se aseguran las mismas condiciones para los días evalua-

dos (mismos comidas y misma actividad física). La siguiente tabla muestra el nivel de glucosa en sangre (mg/dl) adquirido cada día a la misma hora.

Inyecciones	152	140	155	163	138	141	145	154	161	155	160
Bomba de insulina	139	128	140	127	136	129	138	126	131	135	140

159
128

Si el nivel de glucosa se distribuye normalmente sin importar el método usado para el tratamiento, y la variabilidad en dichos niveles es igual para ambos tratamientos, ¿es posible concluir que existe una diferencia real entre el nivel de glucosa promedio con cada tratamiento?

Utilice un nivel de confianza al 99%

$X_1 =$ Inyecciones $\sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ $\qquad \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$X_2 =$ Bomba insulina $\sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

$\to n_1 = 12$

$\to n_2 = 12$

$\bar{X}_1 = 151{,}417 \qquad S_1 = 8{,}5$

$\bar{X}_2 = 132{,}75 \qquad S_2 = 5{,}83$

Utilizamos

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \pm t_{\frac{\alpha}{2}, (n_1+n_2)-2} \, SP \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

$1 - 0{,}99 = \alpha$

$\alpha = 0{,}01$

$\frac{\alpha}{2} = 0{,}005$

$$SP = \sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$$

$V = n_1 + n_2 - 2$

$V = 22$

$$SP = \sqrt{\frac{(11)(72{,}25) + 11(33{,}9889)}{22}}$$

$t_{0{,}005, 22} = 2{,}819$

$SP = 7{,}28$

Scanned by CamScanner

$151,417 - 132,75 \pm 2,819\,(7,28)\sqrt{\frac{2}{12}}$

$(10,28\ ,\ 27,06)$

Con una confianza del 99% se dice que $\mu_1 \neq \mu_2$ por lo que $\mu_1 > \mu_2$, es decir que existe una diferencia real entre los tratamientos

4. Se investiga el diametro de las varillas de acero fabricadas en dos diferentes maquinas de extrusion. Al tomar una muestra aleatoria de 35 varillas de la primera máquina, se encuentra un diámetro promedio de 8,73 mm, con una varianza de 0,35 mm²; por su parte, los resultados obtenidos con 38 varillas de la segunda maquina fueron de un diametro promedio de 8,68 mm con una varianza de 0,4 mm². Con una confianza del 98%, ¿puede sugerirse que existe una diferencia significativa entre el diametro promedio obtenido con cada maquina?

$n_1 = 35 \qquad \bar{x}_1 = 8,73 \qquad S_1^2 = 0,35$

$n_2 = 38 \qquad \bar{x}_2 = 8,68 \qquad S_2^2 = 0,4$

$1-\alpha = 0,98$

$1-0,98 = \alpha$

$\alpha = 0,02$

$\frac{\alpha}{2} = 0,01$

Utilizamos

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$$

$\phi(z_{\alpha/2}) = 1 - 0,01$

$$8,73 - 8,68 \pm 2,33\sqrt{\frac{0,35}{35} + \frac{0,4}{38}}$$

$\phi(z_{\alpha/2}) = 0,99$

$z_{\alpha/2} = 2,33$

$(-0,284\ ,\ 0,384)$ El intervalo contiene al cero

No existe evidencia suficiente con una confianza del 98% para afirmar que hay diferencia significativas entre los promedios

Scanned by CamScanner

(103) Sea $X_1, ..., X_n$ una muestra aleatoria de una población con pdf dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)}{\sigma}}$$

$x > 0$, $\mu \in R$ y $\sigma > 0$

Si se asume μ conocido el EMV para σ es

1. $L(\sigma)$

$$L(\sigma) = \prod_{1}^{n} f(x) = \frac{1}{\sigma^n} e^{-\frac{\Sigma(x-\mu)}{\sigma}}$$

2. $\ell(\sigma)$

$$\ell(\sigma) = \ln(1) - n\ln(\sigma) - \frac{\Sigma(x-\mu)}{\sigma}$$

3. $\ell_\sigma(\sigma)$

$$\ell_\sigma(\sigma) = -\frac{n}{\sigma} + \frac{\Sigma(x-\mu)}{\sigma^2}$$

4. $\ell_\sigma(\sigma) = 0$

$$\frac{n}{\sigma} = \frac{\Sigma(x-\mu)}{\sigma^2}$$

$$\boxed{\sigma = \frac{\Sigma(x-\mu)}{n}}$$

(104) Considere un intervalo de confianza para la media poblacional μ, donde la muestra aleatoria proviene de una distribución $N(\mu, \sigma^2)$ con σ^2 conocido, de la forma $(\bar{X}-a, X+b)$ con $a \neq b$ se puede decir que.

C. El intervalo es asimétrico

Scanned by CamScanner

(105) Un ingeniero textil sabe por experiencia que la resistencia en psi de cierto tipo de hilo tiene una desviación estandar de 5 psi. El fabricante afirma que la resistencia promedio de este hilo es superior a 45 psi. Sea μ la resistencia de este tipo de hilo. Una muestra aleatoria de 64 hilos permite obtener una resistencia promedio de 43 psi con base en un intervalo de confianza al 95 % para μ se puede concluir.

$S = 5$ $\qquad \mu > 45$ $\qquad 1-\alpha = 0{,}95$

$\alpha = 0{,}05$

$n = 64$ $\qquad$ Utilizamos $\qquad \frac{\alpha}{2} = 0{,}025$

$\bar{X} = 43$

$S = 5$

$$\bar{X} \pm Z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \qquad Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$$

$$43 \pm 1{,}96 \frac{5}{\sqrt{64}}$$

$(-\infty, 44.03)$

$(41.775, 44.225)$ $\qquad (41{,}97, \infty)$

41,7 $\qquad$ 44,22

$\boxed{\text{D. } \mu < 45}$

(106) Sea X: el número de individuos a favor de un candidato A de n encuestados. X se distribuye bin(n, p). Sea B la probabilidad de que todos los encuestados este a favor del candidato A. Si (a, b) es un intervalo de confianza al 95% para p, un intervalo al 95 para β es

107) Suponga que $X_1 \dots, X_{15}$ es una muestra aleatoria de una población normal con media μ y varianza 15. Considere los siguientes intervalos aleatorios para μ. Cuando se realice la toma de la muestra, cuál de los dos intervalos de confianza resultantes será el que tenga menor confianza

$$\boxed{\left(\bar{X} \pm 1\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)} \qquad \left(\bar{X} \pm 2\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Intervalo A — Intervalo B

Para A

$$\bar{X} \pm 1\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$1 \to Z_{\alpha/2}$

$$\Phi(1) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

$$1 - 0{,}8413 = \frac{\alpha}{2}$$

$$0{,}1587 = \frac{\alpha}{2}$$

$$\alpha = 0{,}3174$$

$$NC = 1 - \alpha$$

$$NC = 1 - 0{,}3174$$

$$NC = 0{,}6826$$

Para B

$$\bar{X} \pm 2\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$2 \to Z_{\alpha/2}$

$$\Phi(2) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - 0{,}9772$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0{,}0228$$

$$\alpha = 0{,}0456$$

$$NC = 1 - \alpha$$

$$NC = 1 - 0{,}0456$$

$$NC = 0{,}9544$$

∴ El intervalo de menor confianza es el A

(108) La masa de cierta raza de animales mayores de 6 meses es una variable aleatoria normal con media μ y varianza 16 Kg. Basados en una muestra aleatoria de 16 animales con las condiciones antes mencionadas, se obtiene una masa promedio de 40,9 Kg. un IC al 98 % para la masa promedio es

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \qquad \sigma^2 = 16 \qquad 1 - 0{,}98 = \alpha$$

$$n = 16 \qquad \alpha = 0{,}02$$

$$\bar{X} = 40{,}9 \qquad \frac{\alpha}{2} = 0{,}01$$

Utilizamos

$$\Phi(z_{\alpha/2}) = 1 - 0{,}01$$

$$\bar{X} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad \Phi(z_{\alpha/2}) = 0{,}99$$

$$40{,}9 \pm 2{,}33 \frac{4}{4} \qquad z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}33$$

$$\boxed{(38.57,\ 43.23)}$$

(109) Un fabricante de vehículos sabe que el consumo de gasolina de sus vehículos se distribuye normalmente. Se selecciona una muestra aleatoria de carros y se observa el consumo de cada 100 Km obteniendo las siguientes observaciones 19,2 ; 19,4 ; 18,4 ; 18,6 ; 20,5 ; 20,8
Obtenga el intervalo de confianza para el consumo medio de gasolina de todos los autos del fabricante, al nivel de confianza del 99 %

$$n = 6 \qquad \text{Utilizamos} \qquad 1 - \alpha = 0{,}99$$

$$\bar{X} = 19{,}48 \qquad \bar{X} \pm t_{\alpha/2, v} \frac{S}{\sqrt{n}} \qquad 0{,}01 = \alpha$$

$$S = 0{,}981 \qquad \frac{\alpha}{2} = 0{,}005$$

$$19{,}48 \pm 4{,}032 \frac{0{,}981}{\sqrt{6}} \qquad t_{0{,}005, 5} = 4{,}032$$

$$\boxed{(17.86,\ 21{,}095)}$$

(110) Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población con función de densidad de probabilidad dada por

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}$$

$x > 0$
$\alpha > 0$
$\beta > 0$

Si α es conocida el EMV de β es

Taller (16)

1 Juanito Alcachofa ha decidido hacerce rico vendiendo productos de amway. Para lograrlo su objetivo necesita reclutar más de 5 personas en promedio al mes. Juanito entrevistó a 50 persona que trabajan en la compañía para averiguar cuantos personas al mes han reclutado. Decide que aceptara entrar al negocio si el promedio registrado en sus entrevistas es superior a 5,6 personas. Se sabe que el número de personas reclutadas sigue una distribución Poisson

a. Plantee las hipótesis a evaluar y el criterio de decisión

$H_0: \lambda \leq 5$

$H_a: \lambda > 5$

Su desición depende si $\bar{x} > 5,6$

$RR = \{ \bar{x} \,/\, \bar{x} > 5,6 \}$

b. Cual es la probabilidad de cometer error de Tipo I

α = Error Tipo I = P (Rechazar Ho | Ho cierto)

$\alpha = P(\bar{X} > 5{,}6 \mid \lambda = 5)$

Estandarizamos $\rightarrow \dfrac{\bar{X} - \lambda_0}{\sqrt{\lambda / n}}$

$$\alpha = P\left(Z > \frac{5{,}6 - 5}{\sqrt{5/50}}\right)$$

$$\alpha = P(Z > 1{,}9) = 1 - P(Z < 1{,}9$$

$$= 1 - \Phi(1{,}9)$$

$$= \boxed{0{,}029}$$

C. Si en realidad el promedio de personas reclutados es 6 ¿Cual es la probabilidad de cometer error tipo II?

β = Erro Tipo II = P(Aceptar Ho | Ho Falso)

$$\beta = P(\bar{X} \leq 5{,}6 \mid \lambda > 5)$$

Es

$$= P\left(\frac{\bar{X} - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \cdot \sqrt{n} \leq \frac{5{,}6 - 6}{\sqrt{6}} \sqrt{50}\right)$$

$$= P(Z \leq -1{,}15) = 1 - \Phi(1{,}15)$$

$$= \boxed{0{,}1251}$$

2. Se requiere que la tension de ruptura de un hilo utilizado en la fabricación de material de tapicería sea al menos de 100 psi. La experiencia a indicado que la desviación estándar de la tension de ruptura es de 2 psi. Se prueba una muestra aleatoria de 9 especimenes y la tension de ruptura promedio observada es de 98 psi

Scanned by CamScanner

Asumiendo que la tension de ruptura del hilo sigue una distribucion normal.

1. Juego de hipotesis $X \sim n(\mu, \sigma^2)$

$H_0 = \mu \geq 100$

$H_a = \mu < 100$

$\sigma = 2$

$n = 9$

$\bar{X} = 98$

2. Estadistico de prueba

$$Z_c = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \Rightarrow Z_c = \frac{98 - 100}{2 \sqrt{9}} \Rightarrow Z_c = -3$$

3 Criterio de decicion $\boxed{\alpha = 0,05}$

RR

$Z_c < -Z\alpha$

$\Phi(Z_{0,05}) = 1 - 0,05$

$\Phi(Z_{0,05}) = 0,95$

$Z_c < -1,65$

$Z_{0,05} = 1,65$

$Z_c = -3$ $\quad -1.65$

$-3 < -1,65$

$\Phi(-3) = 1 - \Phi(3)$

$= 1 - 0,99865$

$= \underline{\underline{0,00135}}$

Se rechaza Ho, es decir hay evidencia muestral suficiente para sugerir que no se cumplen las especificaciones tecnicas con una significancia del 5%

c ¿Cual es la probabilidad de aceptar la hipotesis nula con $\alpha = 0,05$, si la tension promedio de ruptura verdadero de la fibra es de 101 psi?

$P = (\text{Aceptar } H_0 \mid H_0 \text{ falsa}) = \text{Error tipo 2}$

$P = (\text{Aceptar } H_0 \mid \mu = 101$

$RR = z_c < z_{0,05}$

$= z_c < -z_\alpha \qquad = \dfrac{\bar{X} - 100}{2/\sqrt{9}} < -1,65$

$= z_c < -1,65$

$= \bar{X} < -1,1 + 100$

$= \bar{X} < 98,9$

$P\left[\left(\dfrac{\bar{X} - 101}{2}\right)3 \geq \left(\dfrac{98,9 - 101}{2}\right)3\right.$

$P(z > -3,15) = P(z < 3,15$

$= \Phi(3,15) = \boxed{0,999184}$

La probabilidad de aceptar Ho con $\alpha = 0,05$ si la tensión promedio de ruptura verdadera de la fibra σ de 101 psi es de 99,91 %

3. Un ingeniero que trabaja para un fabricante de llantas investiga la duración promedio de un compuesto nuevo de caucho, para ello, fabrica 16 llantas y las prueba en una carretera hasta alcanzar el fin de la vida útil de éstas. Los datos son los siguientes:

60,613	59,836	59,550	60,252
59,780	60,221	60,311	50,040
60,545	60,257	60,000	59,997
69,947	60,185	60,220	60,523

Asuma que las distancias recorridas siguen una d. normal

a. Al ingeniero le gustaría demostrar que la vida útil promedio de la nueva llanta excede los 60.000 KM. Proponga y pruebe hipótesis apropiadas. Obtenga una conclusión con $\alpha = 0,05$

1 $H_0 : \mu \leq 60\,000$ $\qquad X \sim n(\mu, \sigma^2)$

$H_a : \mu > 60\,000$ $\qquad \sigma^2 =$ Desconocida

cola derecha

$\bar{X} = 60.139,7$

$S = 3645,9$

$n = 16$

2. E.R.

$$T_c = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \quad \text{Donde} \quad t_{n-1} \quad \text{Distribuye } t$$

$$T_c = \frac{60\,139,7 - 60\,000}{3645,9/4} = 0,153$$

3. RR

$t_{0,05,15} = 1,753$

$T_c > t_{\alpha, n-1}$

$T_c > 1,753$

0,153 1,753

No rechazo H_0.

No hay evidencia muestral suficiente para sugerir que las distancias medias recorridas son superio a 60.000 KM con una significancia del 5%

b. Suponga que si, la vida media es de 61.000 km, al ingeniero le gustaría detectar esta diferencia con una probabilidad al menos 0,90. Es adecuado el tamaño de muestra, $n=16$, utilizando el caso anterior, Utilize la desviacion estandar muestral como estimacion de σ para llegar a una decision

$\mu = 61\,000$ $\qquad P = [\text{Rechazar } H_0 \mid H_0 = 61\,000]$

$$= P\left[\frac{\bar{X}-\mu}{S}\sqrt{n} > 1{,}753 \mid \mu = 61.000\right]$$

$$= P\left[\frac{\bar{X}-60\,000}{S}\sqrt{n} > 1{,}753 \mid \mu = 61.000\right]$$

$$= P\left[\bar{X} > \frac{1{,}753 \cdot S}{\sqrt{n}} + 60\,000 \mid \mu = 61.000\right]$$

$$= P\left(\frac{\bar{X}-61\,000}{S}\sqrt{n} > 1{,}753 + \frac{(60.000-61\,000)}{S}\sqrt{n}\right)$$

$$= P\left(t_{(n-1)} > \underbrace{1{,}753 - \frac{1000\sqrt{n}}{S}}_{w}\right) \geq 0{,}90$$

$$P\left(t_{(n-1)} > w\right) \geq 0{,}90$$

$-w = 1{,}28 \qquad w = -1{,}28$

$$-1{,}28 = 1{,}753 - \frac{100\sqrt{n}}{S}$$

$n \geq 122{,}28$ $\qquad \boxed{n \geq 123}$

4. Cuando las ventas medias, por establecimiento autorizado, de una marca de relojes caen por debajo de las 170.000 unidades mensuales, se considera una razón suficiente para lanzar una campaña publicitaria que active las ventas de esta marca. Para conocer la evolución de las ventas, el departamento de Marketing realiza una encuesta a 51 establecimientos ~~a~~utorizados, seleccionados aleatoriamente, que facilitan la cifra de ventas del último mes en relojes de esta marca. A partir de estas cifras se obtienen los siguientes resultados: Venta promedio 169411,8 unidades, desviación estandar de las ventas 32827,5 unidades. con un nivel de ~~confianza~~ significancia del 5% y con la información obtenida a partir de los datos, ¿ se considera oportuno lanzar una nueva campaña publicitaria?

1. $H_0: \mu \geq 170.000$

$H_a: \mu < 170.000$

$n = 51$

$\bar{x} = 169411,8$

$S = 32827,5$

$\alpha = 0,05$

No distribuye normal

Pero $n > 30$

2. EPn

$$Z_c = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{169411,8 - 170.000}{32827,5 / \sqrt{51}} = -0,128$$

3. RR P-Value

$Z_c < -Z\alpha$

$\Phi(Z\alpha) = 1 - 0,05$

$\Phi(Z\alpha) = 0,95$

$Z_{0,05} = 1,65$

Scanned by CamScanner

Poner prueba
T ⇒ RR

$Z < -1,65$

$-1,65$ $\quad$ $-0,128$

No Rechazo Ho

P-Value ⇒ $\Phi(-0,128) = 1 - \Phi(1,28)$

$= 1 - 0,899727$
$= 0,100273$

No hay evidencia muestral suficiente para sugerir que las ventas por local del último mes sean inferiores a 170.000 con una sig de 5%

$\alpha = 0,05$

$0,100273 > \alpha$
No Rechazo Ho

↳ Por tanto se sugiere no lanzar la campaña

Taller 17

1. Una compañía desea implementar un nuevo modificador de leche en su línea. Este producto debe ser mejor que el de su competencia para garantizar mayor volumen de ventas. La manera como se verifica si el modificador es mejor es midiendo el tiempo medio dilución en leche. Se desea probar que el tiempo medio de dilución de su marca es inferior al de la competencia. Para verificarlo se registraron los tiempos de dilución en seg de 100 sobres de 20 gr de su marca en 500 ml de leche a 50 rpm y y 95 sobres de 20 gr de la marca del competidor bajo las mismas condiciones. Los resultados fueron:

	$\bar{X}$ Muestra	S^2 Muestra
Marca Propia	108,2	11,1
Competencia	110,8	10,7

¿ Existe evidencia muestral suficiente para sugerir que el tiempo medio de dilución de la marca propia es inferior al de la competencia ?
Use un $\alpha = 0{,}02$

$n_1 = 100$ $\qquad$ $n_1, n_2 \geq 30$ Aproximación
$n_2 = 95$

μ_1 = Propia
μ_2 = competencia

1.
$H_a = \qquad \Rightarrow \mu_1 - \mu_2 = 0$
$H_0 = \mu_1 < \mu_2 \Rightarrow \mu_1 - \mu_2 < 0$

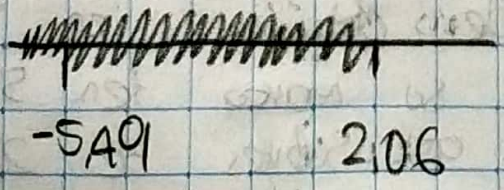
2. Eph

$$Z_c = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \delta_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} = \frac{108{,}2 - 110{,}8}{\sqrt{\frac{11{,}1}{100} + \frac{10{,}7}{95}}}$$

$Z_c = -5{,}49$

3. RR $\quad$ P-Value
$Z_c < -Z_\alpha$

$\phi(Z_\alpha) = 1 - 0{,}02$
$\phi(Z_\alpha) = 0{,}98$



$Z_{0,02} = 2{,}06$

Rechazo H_0

P- Valor: $\Phi(-5{,}49) = 1 - \Phi(5{,}49)$

↳ Muy grande

P-valor : Muy pequeño Rechazo Ho

Hay evidencia muestral suficiente para suponer que el tiempo medio de dilución de la marca propia es inferior a la de la competencia con una significancia del 2%

2. En la universidad se llevo a cabo un estudio para determinar si comer una chocolatina antes de presentar un parcial, mejora la capacidad cerebral y el rendimiento en la prueba. Para ello se seleccionan 40 personas de distintas características para que se comieran la chocolatina y 40 personas que no lo harían se realizó la prueba y se revisaron las respuestas correctas de los individuos. Los resultados fueron

	$\bar{X}$	S	n
Res. buenas con chocolatina	65	6	
Res buenas sin Cholatina	50	8	

¿h.e.m.s.p.s.q el # promedio de respuestas buenas que tiene un individuo que consume chocolatina antes del parcial es mayor al # promedio de respuestas buenas de una persona que no lo consume por más de 5 respuestas

$n_1, n_2 = 40$ $n_1, n_2 \geq 30$ ✓

TLC, Aproximación

1 $Ha = \mu_1 \leq \mu_2 + 5 \Rightarrow \mu_1 - \mu_2 \leq 5$

$Ho = \mu_1 > \mu_2 + 5$ $\mu_1 - \mu_2 > 5$

Scanned by CamScanner

2. tph

$$Z_c = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - \delta_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} = \frac{65 - 50 - 5}{\sqrt{\frac{6^2}{40} + \frac{8^2}{40}}} = 6,32$$

3. $\alpha = 0,05$

$Z_c > Z_\alpha$

$\Phi(Z_\alpha) = 1 - 0,05$

$Z_c > 1,65$ $\quad Z_\alpha = 1,65$

1,65 — 6,32 Rechazo Ho

$P\text{-}Value = \Phi(>6,32) = 1 - \underbrace{\Phi(6,32)}_{\text{Muy grande}}$

P-Value: Muy pequeño ∴ Rechazo Ho

h.e.m.s.p.s. que el promedio de respuestas buenas es mayor en los que consumen chocolate antes de un parcial.

3. Una persona de la comunidad LGBT desea conocer si existe mayor riesgo al estar en una relacion con un hombre que con una mujer. Esta variable se mide por el número de infidelidades cometidas en la última relación amorosa que tuvieron cada uno de los entrevistados. Se obtienen datos reales de 50 hombres y 45 mujeres. El resumen muestral para ~~cada~~ caso se muestra a continuación: ~~24 hombres y 45 mujeres~~

	Infidelidades hombres	Infidelidades mujeres
Promedio	3,1	1,9
Desviacion estandar	0,9	1,2

¿h.e.M.S.P.S. que los mujeres son mas fieles que los hombres

No normal

$n_1, n_2 \geq 30$ / TLC Aproximacion

$n_2 = 50$

$n_1 = 45$

1.

$H_0: \mu_H \leq \mu_M \Rightarrow \mu_M - \mu_H = 0$

$H_a: \mu_H > \mu_M \Rightarrow \mu_M - \mu_H < 0$

2. Eph

$$Z_c = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \delta_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

x_1 = Mujeres

x_2 = Hombres

$$Z_c = \frac{1,9 - 3,1}{\sqrt{\frac{(1,2)^2}{45} + \frac{(0,9)^2}{50}}} = -5,46$$

3.

$\alpha = 0.05$

$Z_c < Z_\alpha$

$\Phi(Z_{0,05}) = 1 - \alpha$

$Z_c < 1,65$

$\Phi(Z_{0,05}) = 0,95$

$\boxed{Z_{0,05} = 1,65}$

-5,46 1,65

Rechazo H_0

P-Value $= \Phi(-5,46)$

$= 1 - (5,46)$ muy gran

P-Value = muy pequeño

Rechazo H_0

Hay evidencia muestral suficiente para sugerir que en promedio los hombres son mas infieles que las Mujeres

4. Un investigador afirma que, aunque el tiempo promedio requerido para completar un examen de calculo es muy similar en hombres y mujeres, hay mayor variabilidad en los tiempos empleados por los hombres que el empleado por las mujeres. Para verificarlo se realizo la prueba en 16 hombres y en 14 mujeres. Se registran los tiempos empleados por cada uno para completar el examen. Los resultados muestrales obtenidos son:

	Hombres	Mujeres
Promedio	39,3	40,6
Desviacion Estandar	4,6 S_1	3,3 S_2

Suponiendo que los tiempos requeridos para completar el examen siguen una distribucion normal sin importar el genero ¿apoyan los datos la afirmacion del investigador?

Hombres $= X \sim N(\mu, \sigma_1^2)$
Mujeres: $Y \sim N(\mu, \sigma_2^2$

1

$$H_0 = \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2 \Rightarrow \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$
$$H_a = \sigma_1^2 > \sigma_2^2 \Rightarrow \sigma_1^2 > \sigma_2^2 \quad 1$$

2. Eph

$$F_c = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{4,6}{3,3} = 1,394$$

3 RR

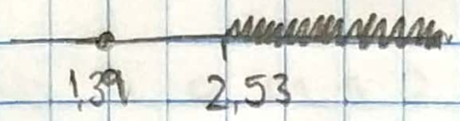
$F_c > F_{1-\alpha}\ (n_1-1, n_2-1)$ $\alpha = 0{,}05$

$F_{0,95}\ (15, 13) = 2{,}53$

$\hookrightarrow$ Tabla F

$F_c > 2{,}53$

No rechazo Ho



Los datos no apoyan la afirmacion del investigador, ya que no hay evidencia muestral suficiente para sugerir que la variabilidad de los tiempos empleados por los hombres es mayor que la de las mujeres con una significancia del 5%

Taller 18

1. El director comercial de una empresa de Donas piensa que el volumen promedio de ventas diarias del punto de venta de la zona sur es mayor al de la zona norte. Recientemente se obtuvieron muestras aleatorias para ambos puntos de venta de tamaño 10 y 13 para la zona norte y sur respectivamente, de los cuales se obtuvo que el volumen de ventas promedio de la zona norte es de \$290, con una desviacion estandar de \$12 mientras que para la zona sur el volumen de ventas promedio fue de 308,5 con una desviacion de \$15. De estudios anteriores se sabe que el volumen de ventas para ambos puntos se distribuye normal ¿Puede afirmarse que el pensamiento del director de ventas es correcto? use el valor P para responder la pregunta.

1 Ho $\mu_S \leq \mu_N \Rightarrow \mu_N - \mu_S = 0$ | $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Ha $= \mu_S > \mu_N \Rightarrow \mu_N - \mu_S < 0$ | $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$

$n_S = 13$ $n_N = 10$

Scanned by CamScanner

$\bar{X}_N = 290$ $S_N = 12$
$\bar{X}_S = 308{,}5$ $S_S = 15$

Es Normal con varianzas desconocidas, seran estas iguales o diferente

Ph Homocedasticidad

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$
$$H_a : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

Ep

$$F_c = \frac{12}{15} = 0{,}8 = 0{,}64$$

RR

$$F_c < \frac{1}{f_{1-\alpha/2}(n_2-1, n_1-1)} \quad \text{o} \quad F_c > f_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)$$

$$F_c < \frac{1}{F_{0,975}(12, 9)} \quad \text{o} \quad F_c > F_{0,975}(9, 12)$$

$$F_c < \frac{1}{3{,}44} \quad \text{o} \quad F_c > 3{,}87$$

0,291 0,64 3,87

No Rechazo Ho

P-Value

$F_c < 1$, $P(F_{(v_1, v_2)} < F_c) + P\left(F_{(v_2, v_1)} > \frac{1}{F_c}\right)$

$= P(f_{(9,12)} < 0{,}64) + P(f_{(12,9)} > 1{,}5625)$

$\approx 0{,}51$

No rechazo

No h.e.m.s.p.s. que $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, por tanto se cumple el supuesto de homocedasticidad con una significancia del 5%

Varianzas iguales

Eph

$$T_c = \frac{\bar{X}_N - \bar{X}_S - \delta_0}{S_P\sqrt{\frac{1}{n_N} + \frac{1}{n_S}}} = \frac{290 - 308{,}5}{S_P\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{13}}}$$

$$S_P = \sqrt{\frac{(n_N - 1)S_N^2 + (n_S - 1)S_S^2}{n_N + n_S - 2}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 12^2 + 12 \cdot 15^2}{21}}$$

$$= 13{,}79$$

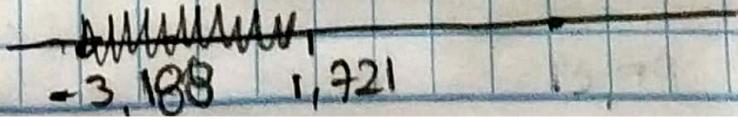
$$\boxed{T_c = -3{,}188}$$

RR

$T_c < t_{\alpha, 9}$

$T_c < t_{0{,}05, 21}$

$T_c < 1{,}721$ Rechazo Ho



P- Value $P(t < -3{,}188) = P(t \quad < -3{,}188)$

$$P(t_{21} < -3{,}188) < P(t_{21} < 2{,}831)$$

$$< 0{,}05$$

P-Value $< 0{,}005$ Rechazo H_0

hay evidencia muestral suficiente para sugerir que el volumen promedio de ventas de la zona sur es superior a la del norte con una significancia del 5%

2. Dos universidades financiadas por el Gobierno tiene metodos distintos para inscribir ~~[illegible]~~ a sus alumnos a principios de cada semestre y por lo tanto, se tiene la creencia que los tiempos promedios requeridos por los estudiantes en ambas universidades son diferentes. En cada universidad se anotaron los tiempos de inscripcion para 10 alumnos seleccionados al azar. Las medias y las desviaciones estandar muestrales son las siguientes

Universidad 1 : $\bar{X}_1 = 50{,}2$ $S_1 = 4.8$

Universidad 2 : $\bar{X}_2 = 52{,}9$ $S_2 = 5{,}4$

Si se supone que el tiempo de inscripcion en ambas universidades tiene una distribucion normal ¿cual es la conclusion respecto a la creencia manifestada? use un nivel $\alpha = 0{,}02$.

Scanned by CamScanner

$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ = Un 1 $\quad n_1 = 10$ $\quad$ Varianzas

$X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ = Un 2 $\quad n_2 = 10$ $\quad$ Desconocidas

1. $H_0\ \mu_1 = \mu_2 \rightarrow \mu_1 - \mu_2 = 0$

$H_a = \mu_1 \neq \mu_2 \rightarrow \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

Bilateral

2 Varianzas iguales ?

$1 - \frac{\alpha}{2}$

$1 - 0,01$

$0,99$

* $H_0 = \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

  $H_a = \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

* $\frac{S_1^2}{S_2^2} = \left(\frac{4,8}{5,4}\right)^2 = \frac{64}{81} = 0,790$

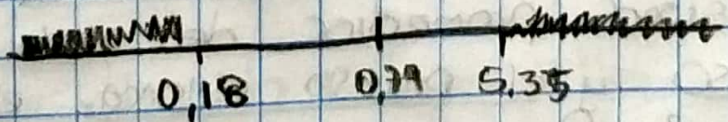
* RR

$Fc < \frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2},(n_2-1,n_1-1)}}$ o $Fc > F_{1-\alpha/2,(n_1-1,n_2-1)}$

$Fc < \frac{1}{F_{0,99}(9,9)}$ o $Fc > F_{0,99}(9,9)$

$FC < \frac{1}{5,35}$ o $FC > 5,35$

$Fc < 0,1869$ o $Fc > 5,35$



No Rechazo H_0, Por tanto $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

2. tenemos varianzas iguales entonces tph

$$T_c = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{SP\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \qquad SP = \sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$$

$$SP = \sqrt{\frac{9\cdot(4,8)^2 + 9\cdot(5,4)^2}{18}}$$

$$T_c = \frac{50,2 - 52,9}{5,1\sqrt{\frac{1}{5}}}$$

$$\boxed{SP = 5,1}$$

$$T_c = -1,18$$

3. RR

$$|T_c| > t_{\alpha/2}\,(n_1+n_2-2)$$

$$1,18 > t_{0,01}\,(18)$$

$$1,18 > 2,55$$

1,18 2,55

No se rechaza, es decir que no hay evidencia muestral suficiente para sugerir que los tiempos requeridos por los estudiantes en ambas universidades son diferentes con una significancia de 2%

3. Cierto metal se produce, por lo general, mediante un proceso estandar. Se desarrolla un nuevo proceso en el que se añade una aleación a la produccion del metal. El ingeniero de materiales afirma que la diferencia entre las tensiones promedios del metal obtenido en el nuevo proceso y el proceso estandar es superior a 9 kg/mm². Para comprobar tal situacion se toman 15 muestras del proceso estandar y 13 para el nuevo proceso. Se encontro que los promedios de tension a la ruptura fueron de 23 kg/mm² y 34 kgr/mm² respectivamente. Se asume que las tensiones del metal, para ambos procesos, tienen distribuciones normales

Scanned by CamScanner

Con varianzas 9 y 12 para el proceso estandar y para el nuevo respectivamente ¿Que se puede concluir?

X_1 = Proceso Estandar
X_2 = Proceso Nuevo

$n_1 = 15$ muestras $\quad X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$
$n_2 = 13$ muestras $\quad X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

$\bar{X}_1 = 23$
$\bar{X}_2 = 34$

$\sigma_1^2 = 9 \quad \sigma_2^2 = 12$

varianzas conocidas

1.

$H_0: \mu_2 - \mu_1 \leq 9$
$H_a: \mu_2 - \mu_1 > 9$

2 Eph

$$Z_c = \frac{\bar{X}_2 - \bar{X}_1 - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{34 - 23 - 9}{\sqrt{\frac{9}{15} + \frac{12}{13}}} = \boxed{1{,}62}$$

3. RR, P-Value $\quad \alpha = 0{,}05$

$Z_c > Z_\alpha$

$\Phi(Z_{0,05}) = 1 - 0{,}05$
$\Phi(Z_{0,05}) = 0{,}95$
$\boxed{Z_{0,05} = 1{,}65}$

$Z_c > 1{,}65$

1,62 1,65

No Rechazo Ho

$\Phi(> Z_c) = $ P-value

P-value > α

P-value $= 1 - \Phi(Z_c)$
P-value $= 1 - \Phi(1{,}62)$
P-value $= 0{,}052$

No Rechazo Ho

No hay evidencia Muestral suficiente para Sugerir que la diferencia entre las tensiones promedios de metal con los dos procesos es Superior a Kg/mm^2

4. Se deseaba comparar la actividad motora de ratas desnutridos y ratas en control. La actividad motora fue registrada como el N° de veces que una rata pasaba delante de una celula fotoeléctrica durante 24 horas.
El investigador afirma que las ratas bajo control poseen en promedio una actividad motora Mayor que las ratas desnutridas.
Para verificar su afirmacion se considera un grupo de 8 ratas bajo control y otro de 10 ratas desnutridas; se registran para cada rata en cada grupo la actividad motora. Los resultados fueron los siguientes

Grupo	n	$\bar{X}$	S
Ratas Desnutridas	10	137	9,3
Ratas Bajo Control	8	142	6,4

Asumiendo que la actividad motora se distribuye de manera normal, para ambos grupos de ratas, y usando la informacion de la tabla anterior, ¿cual es la conclusion? use $\alpha = 0{,}05$.

X_2 = Ratas desnutrida $\quad n_2 = 10 \quad \bar{X}_2 = 137 \quad S_2 = 9.3$
X_1 = Ratas bajo control $\quad n_1 = 8 \quad \bar{X}_1 = 142 \quad S_1 = 6.4$

$X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ varianzas desconocidas
$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$

1. $H_0 = \mu_1 \leq \mu_2 \rightarrow \mu_1 - \mu_2 = 0$

$H_a = \mu_1 > \mu_2 \rightarrow \mu_1 - \mu_2 > 0$

Sus varianzas son iguales ?

* $H_0 = \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$H_a = \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

$\alpha = 0,05$

$\frac{\alpha}{2} = 0,025$

$1 - \frac{\alpha}{2}$

$0,975$

* $Fc = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{(6,4)^2}{(9,3)^2} = 0,47$

* RR

$Fc < \frac{1}{F_{0,975}(9,7)}$ ó $Fc > f_{0,975}(7,9)$

$Fc < \frac{1}{4,20}$ ó $Fc > 4,82$

$Fc < 0,24$ ó $Fc > 4,82$

0,24 0,47 4,82

No Rechazo H_0

$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

Tenemos varianzas iguales

2. EPh

$$T_c = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{SP\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

$$SP = \sqrt{\frac{(8-1)(6,4)^2 + (10-1)(9,3)^2}{10+8-2}}$$

$SP = 8,159$

$$T_c = \frac{142 - 137}{8,159\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{8}}} = \boxed{1,292}$$

$T_c > t_{\alpha,16}$

$T_c > 1{,}746$

1,292 1,746

No Rechazo Ho

No hay evidencia muestral suficiente que sugiera que las ratas bajo control poseen en promedio una actividad motora mayor que las ratas desnutridas

Taller 19

1 En el castillo de San Lucas, Laura está encargada de la preparación de chocolates en vivo para enseñar a los clientes como se logra la conformación de una barra de chocolate y lograr mas ventas. En los ultimos dias comenzó a experimentar con diferentes adiciones al chocolate al 100% de cacao, el cual sabe es dificil de consumir por ser más amargo. Suponga que la empresa acepta incorporar el producto al mercado ~~de los~~ si hay pruebas solidas que sugieran que menos del 35% de los consumidores no lo encuentran aceptable. Para saber si incorporan su nueva receta al mercado de los chocolates decidió dar muestras gratis durante 2 semanas y conocer el número de clientes satisfechos con el nuevo producto. En estas semanas regalo 100 muestras a diferentes clientes, de los cuales 33 no se mostraron satisfechos con el producto. Usando el valor p ¿Que se puede concluir

1 Ho : $P \geq 35$
Ha : $P < 0{,}35$
$n \geq 30$

$\hat{P} = \frac{33}{100} = 0{,}33$

2 Er|

$$Z_c = \frac{\hat{P} - P_o}{\sqrt{\frac{P_o(1-P_o)}{n}}} = \frac{0,33 - 0,35}{\sqrt{\frac{0,33(0,67)}{100}}} = -0,425$$

3 RR, P-value $\qquad \alpha = 0,05$

$Z_c < -Z_\alpha$ $\qquad \Phi(Z_\alpha) = 1 - \alpha$

$\Phi(Z_\alpha) = 0,95$

$Z_c < -1,65$ $\qquad \boxed{Z_\alpha = 1,65}$

-1,65 $\quad$ -0,425 $\qquad$ No Rechazo Ho

$$P\text{-Value} = \Phi(-0,425) = 1 - \Phi(0,425)$$
$$= 0,3354$$

P-Value $> \alpha$ No Rechazo Ho

No hay evidencia muestral suficiente para sugerir que menos de 35% de los consumidores no lo encontrar aceptable, por tanto el producto no sera incorporado

2. En estudios previos de familia se indicaba que la proporcion de personas que presentan quejas por inconformidad con las toallas de papel de cocina era del 10%, pero el encargado de servicio al cliente cree que este porcentaje a aumentado. Para estar seguro, toma una muestra aleatoria de 200 usuarios y encuentra que 25 de ellos han presentado quejas por este producto. ¿Cual es el minimo nivel de significancia con el que existira evidencia de aumento en el porcentaje de quejas por las toallas de cocina

1 Ha : $P \leq 0{,}1$ $\frac{25}{200} = \hat{P}$, $\hat{P} = 0{,}125$

Ho : $P > 0{,}1$

$n \geq 30$ ✓

2. Eph

$$Z_c = \frac{\hat{P} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}} = \frac{0{,}125 - 0{,}1}{\sqrt{\frac{0{,}1(0{,}9)}{200}}} = 1{,}179$$

3 P-value $= \Phi(Z_c)$

$$\Phi(>Z_c) = 1 - \Phi(1{,}18)$$

P-value $= 0{,}119$

El minimo valor de α con el que existiria evidencia del aumento del porcentaje es $\alpha = 0{,}120$

5. En una investigacion de calidad de laminas producidas en la empresa, se propone que el número de abolladuras en una lámina sigue una distribucion poisson. Se reune una muestra aleatoria de 100 láminas y se observa el número de abolladuras. Los resultados obtenidos son los siguientes

# abolladuras	0	1	2	3 o mas
Frecuencias observadas	53	27	13	7

¿Que puede concluirse acerca de la propuesta de la investigación? Use el valor - P

X = # de abolladura en una lámina producida

$X \sim Poiss(\lambda)$ → Se desea establecer con información muestral

$n = 100$ láminas

1. $H_0 = X \sim P(\lambda) \Leftrightarrow P(x) = \frac{e^{-\lambda}(\lambda)^x}{x!}$

$H_a = X \nsim P(\lambda) \Leftrightarrow P(x) \neq P(\lambda)$

2. EPh

$$X_c = \sum_{i=1}^{c} \frac{(O_i - e_i)^2}{e_i}$$

Necesitamos e_i, que lo hallamos nP_i, pero para cada P_i necesitamos λ, entonces utilizamos el EMV que es $\bar{X}$

$$\bar{X} = \frac{(0 \times 53) + (1 \times 27) + (2 \times 13) + (3 \times 7)}{100} = 0{,}74$$

$$\hat{\lambda} = 0{,}74$$

$$nP_0 = 100 \times \left[\frac{e^{-0{,}74} \cdot (0{,}74)^0}{0!}\right] = 47.7$$

$$nP_1 = 100 \times \left[\frac{e^{-0{,}74} \cdot (0{,}74)^1}{1!}\right] = 35{,}306$$

$$nP_2 = 100 \times \left[\frac{e^{-0{,}74} \cdot (0{,}74)^2}{2!}\right] = 13{,}063$$

$$np_3 = 100 \times \left[\frac{e^{-0,74} (0,74)^3}{3!} \right] = 3,22$$

Es mejor hacer esta última por complemento

3,932

4) $H_0: X \sim P_0(0,74)$

$H_a: X \nsim Pois(0,74)$

Recordemos la regla empírica

$np_i \geq 5$

Vemos que la categoría 3^+ no cumple entonces sumamos categoría

# Abolladuras	0	1	2	3^+	2^+
Frec (Obs)	53	27	13	7	20
Pi calc (H_0)	0,477	0,3530	0,1306	0,0393	0,17
Frec (esp) ei	47,7	35,306	13,062	3,93	17

$$X_c = \sum_{i=0}^{2} \frac{(53-47,7)^2}{47,7} + \frac{(27-35,306)^2}{35,306} + \frac{(20-17)^2}{17}$$

$$X_c = 4,3$$

3. P-Value

$P(X^2_{(c-k-1)} > X_c)$ grados de libertad

X^2 = chi cuadrado

c = # clases

k = Parametros estimada

$P(X^2_{(3-1-1)} > X_c)$

$3,841 < 4,23 < 5,024$

$P(X^2_{(1)} > X_c)$

$0,05 > P\text{-value} > 0,025$

P-value = 0,038

Con una significan del 5%, se rechaza Ho, es decir que hay evidencia muestras suficiente para sugerir que $X \sim Poiss(0,79)$.

4. Historicamente en cierta universidad, la distribucion de estudiante de pregrado por estrato ha sido

Estrato	1	2	3	4	5	6
Porcentaje	13,2%	35,8%	36,5%	9,9%	4,0%	0,6%

Un investigador afirma que, debido a los recientes ajustes en el proceso de admision en los ultimos años, relacionados con mayor cobertura en los estratos bajos, se han modificado esta distribucion porcentual. Para verificarlo, toma una muestra aleatoria de 900 estudiantes y registra el estrato socioeconomico. Los resultados obtenidos son:

Estrato	1	2	3	4	5	6
Frecuencia	94	342	360	63	36	5

¿Estos datos apoyan la hipotesis del investigador?

1

$$H_0 = P_1 = 0,132 \; ; P_2 = 0,358 \; ; P_3 = 0,365 \; ; P_4 = 0,099 \; ; P_5 = 0,04 \; ; P_6 = 0,06$$

$$H_a = \exists_i \text{ tal que } P_i \neq P_{0i}$$

2. Eph

$$X_c = \sum_{i=1}^{6} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$$

Estrato	1	2	3	4	5	6
Frec (obs) o_i	94	342	360	63	36	5
Frec (esp) e_i	118,8	322,2	328,5	89,1	36	54

$n = 900$

$$\chi_c = \frac{(94-118{,}8)^2}{118{,}8} + \frac{(342-322{,}2)^2}{322{,}2} + \frac{(360-328{,}5)^2}{328{,}5} + \frac{(63-89{,}1)^2}{89{,}1}$$

$$+ \frac{(36-36)^2}{36} + \frac{(5-54)^2}{54}$$

$\chi_c = 17{,}089$

3. P-value

$P(\chi^2_{(c-k-1)} > \chi_c)$

$P(\chi^2_{(5)} > \chi_c)$

$P(\chi^2_{(5)} > 17{,}085)$

p-value $< 0{,}005$

Se rechaza Ho, es decir hay evidencia muestral suficiente para sugerir que los porcentajes han cambiado en los últimos años con una significancia del 5%

(III) Se quiere comparar el desempeño de dos operadores que miden la dureza Rockwell de un acero. Se desea establecer si existe diferencia entre los valores promedio registrados por ambos operadores. Para verificar esto, cada operador hace 11 mediciones de dureza de un bloque patrón de acero. Las durezas promedio obtenidas para el operador 1 y 2 fueron 119 y 113 respectivamente. Asuma que las mediciones de dureza para ambos operadores están normalmente distribuidas, con desviaciones de 1,2 y

1,4 respectivamente. El juego de hipotesis y estadistico de prueba mas adecuados son:

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ Varianzas conocidas
$Y \sim N(\mu, \sigma^2)$

1. $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \rightarrow \boxed{\mu_1 = \mu_2}$
$H_a: \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \rightarrow \boxed{\mu_1 \neq \mu_2}$

2. EPh

$$\boxed{Z_c = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{1,2^2}{11} + \frac{1,4^2}{11}}}}$$

(112) La Duracion media de una muestra de 100 tubos fluorecentes, producidos por una compañia resulto ser 1595 horas con varianza de 215 horas. Se dese verificar si en efecto la duracion es la ideal de 1600 horas. La opcion correcta e)

$H_0 = \mu = 1600$ $\quad S^2 = 215 \quad \bar{X} = 1595$
$H_a = \mu \neq 1600$ $\quad n = 100$
$n \geq 30$

$$Z_c = \frac{1595 - 1600}{\sqrt{215}/\sqrt{100}} = \boxed{-3,41}$$

P-value $\quad \boxed{P\text{-Value} = 0,00064}$

$= 2P(Z > |Z_c|)$
$= 2P(Z > |-3,41|)$
$= 2(1 - P(Z < |-3,41|)$
$= 2 - 2\Phi(3,41)$

113) El artículo "The Association of Marihuana Use With outcome of pregnancy" reporta los siguientes datos sobre la incidencia de disfunciones importantes en recien nacidos con madres no fumadoras de Marihuana. Estos se muestran en la siguiente tabla

	No fumadoras
Tamaño de muestra	11178
# de disfunciones importantes	264

Se desea establecer si la proporción de nacimientos con disfunciones en mujeres no fumadoras es no superior al 2%. El valor P aproximado para esta prueba es

$X \sim Bin(n, p)$ $\qquad \hat{P} = \dfrac{264}{11178} = 0{,}02362$

1 $H_0 = P \leq 0{,}02$
$H_a = P > 0{,}02$

2 EPh

$$z_c = \frac{\hat{P} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}} = 2{,}52$$

3 P-value

$$P(Z > z_c) = 1 - \Phi(2{,}52)$$
$$= \boxed{0{,}00057}$$

114) Un investigador afirma que más del 10% de los cascos de ciclismo tienen defectos de fabricación que pueden provocar daño. Una muestra de 200 cascos elegidos aleatoriamente revela que 25 de

Scanned by CamScanner

ellos contienen tales defectos usando un nivel $\alpha = 0{,}05$, la conclusion es

1 $H_o = P \leq 0{,}1$ $\qquad \hat{P} = \frac{25}{200} = 0{,}125$

$H_a = P > 0{,}1$

$n \geq 30$ ✓

2. EP

$$Z_c = \frac{\hat{P} - P_o}{\sqrt{\frac{P_o(1-P_o)}{n}}} = 1{,}069$$

3 RR, P- Value

$Z_c > Z_\alpha$

$\Phi(Z_{0,05}) = 1 - \alpha$

$\Phi(Z_{0,05}) = 0{,}95$

$Z_{0,05} = 1{,}65$

$Z_c > 1{,}65$

1,069 1,65

No rechazo

P-Value $= \Phi(> 1{,}069)$

$= 1 - \Phi(1{,}069)$

$= 0{,}14$

No h e M.S.P.S. q
mas de 10% de los
cascos de ciclismo
tiene defectos de
fabricacion.

P-Value > α No Rechazo

D. EL INVESTIGADOR ESTA ERRADO EN SU AFIRMACION

(115) Dos tipos de defectos \$A\$ y \$B\$ se ven con frecuencia a la salida de un proceso de Manufactura. Cada articulo puede ser clasificado en una de 4 clases: $A \cap B$, $A' \cap B$, $A \cap B'$, $A' \cap B'$ se inspeccionaron 100 articulos y se obtuvo =

Clase	$A \cap B$	$A' \cap B$	$A \cap B'$	$A' \cap B'$
Frec	48	18	21	13

Se tiene la creencia que las Proporciones que pertenecen

a cada categoria estan en relacion 5:2:2:1
el valor P de esta prueba es:

Clase	1	2	3	4
F.O	48	18	21	13
P	0,5	0,2	0,2	0,1
F.E	50	20	20	10

$e_i = nP_i$

$H_0 = \forall\ P_i = P_{0i}$
$H_a = \exists i$ tal que $P_i \neq P_{0i}$

$$\chi_c = \sum_{1}^{4} \frac{(O_i - e_i)^2}{e_i} = \frac{4}{50} + \frac{4}{20} + \frac{1}{20} + \frac{9}{10}$$

$$= \boxed{1,23}$$

P- value

$\hookrightarrow P(\chi^2_{(c-k-1)} > \chi_c)$

$P(\chi^2_{(3)} > 1,23)$

$\boxed{P\text{-value} > 0,1}$

(116) Un nuevo tratamiento para cierta enfermedad promete ser efectivo en más del 80% de los casos. De ser cierto, dicho tratamiento sera aceptado por la organizacion mundial de la salud (OMS). Si 60 voluntarios se someten a este tratamiento, el número minimo de voluntarios que se deben curar para que la OMS lo acepte es (use $\alpha = 0,05$)

1 $H_0 = P \leq 0.8$
$H_a = P > 0.8$

$\hat{P} = \frac{N}{60}$

2. $Eh = Z_c = \frac{\hat{P} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}} =$

$$z_c = \frac{\frac{V}{60} - 0{,}8}{\sqrt{\frac{0{,}8(0{,}2)}{60}}}$$

Por RR, $\alpha = 0{,}05$

$z_c > z_\alpha$

$z_c > 1{,}65$

$$\frac{\frac{V}{60} - 0{,}8}{0{,}052} > 1{,}65$$

$$\frac{V}{60} - 0{,}8 > 0{,}085$$

$$\frac{V}{60} > 0{,}885$$

$V > 53{,}1$

El # minimo de voluntarios que se deben curar para que la OMS lo acepte es $\underline{\underline{54}}$

(117) Depues de analizar los posibles rutas de evacuacion en una plataforma petrolera, un muestreador afirma que el tiempo promedio requerido para que una persona evacue a zona segura es superior a 6 minutos. El encargado de la plataforma no esta de acuerdo y decide verificar esta afirmacion. Para ello planea un evacuacion simulado y toma los tiempos requeridos por 26 trabajadores para llegar a zona segura. Los resultados muestrales obtenidos son tiempo promedio 370,69 (en segundos) y desviacion estandar 24,26 (segundos). Asuma que estos tiempos distribuyen normalmente. La conclusion con un alfa de 0,05 es:

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

H_a $\mu \leq 6\ min \rightarrow \mu \leq 360\ seg$

$H_0 = \mu > 6 min \rightarrow \mu \leq 360\ seg$

$n = 26$

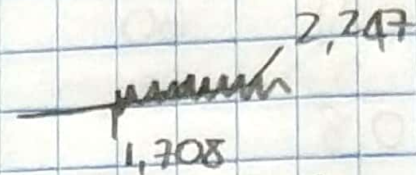
$\bar{X} = 370{,}69$ $\alpha = 0{,}05$

$S = 24{,}26$

$$T_c = \frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{370,69-360}{24,26/\sqrt{26}} = 2,247$$

RR

$T_c > t_{\alpha, n-1}$



$T_c > t_{0,05(25)}$

$T_c > 1,708$

Rechazo Ho

Por tanto la afirmacion del investigador es correcta

(118) Un proceso quimico está diseñado para producir en promedio 800 toneladas de cierta sustancia por dia. Para verificar esto se observan las producciones diarias de las dos semanas anteriores (12 observaciones) con base en dichos registros se obtiene una cantidad de produccion promedio de 802,5 toneladas y una desviacion estandar de 3,0 toneladas. Asumiendo que las cantidades producidas diariamente es una variable aleatoria normal el valor p de esta prueba es:

$H_0 = \mu = 800$ $\quad X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$H_a = \mu \neq 800$ $\quad n = 12$

$\bar{X} = 802,5$

$S = 3,0$

$$T_c = \frac{802,5-800}{3/\sqrt{12}} = 2,887$$

P-value $= 2P(T > |T_c|)$

$= 2P(T_{(11)} > |2,887|)$

$= 2P(T_{(11)} > 2,887)$

$= 2\,(0,01 > \text{P-value} > 0,005)$

$= \underline{0,02 > \text{P-value} > 0,01}$

$2,718 < 2,887 < 3,106$

$0,01 > \text{P-value} > 0,005$

(119) Una artículo de fortune afirmaba que menos del 40% de todos los ingenieros continúan estudios académicos después de terminar el pregrado (Maestría o Doctorado). Datos de un artículo de Engineering Horizons indica un que 210 de 480 ingenieros recién graduados planeaban hacer estudios de postgrado. El valor P aproximado de la prueba es:

1 $H_0 = P \geq 0{,}4$ $\quad n = 480$

$H_a = P < 0{,}4$

$n \geq 30$ ✓

$\hat{P} = \frac{210}{480} = 0{,}4375$

2 EPh

$$Z_c = \frac{\hat{P} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}} = \frac{0{,}4375 - 0{,}4}{\sqrt{\frac{0{,}4\,(0{,}6)}{480}}} = 1{,}6771$$

3 P-value

$\to P(z < Z_c) = \Phi(1{,}6771) = \boxed{0{,}95324}$

(120) El jefe de producción de cierta empresa asegura que la producción de productos defectuosos es menor del 30%. Si se extrae una muestra aleatoria de 40 unidades, usando un $\alpha = 0{,}02$, el número mínimo de unidades defectuosas necesarias para refutar la afirmación del jefe es:

1 $H_0 = P \geq 0{,}3$ $\quad n = 40$ $\quad \hat{P} = \frac{x}{40}$

$H_a = P < 0{,}3$ $\quad \alpha = 0{,}02$

$n \geq 30$ ✓

2. EPn

$$Z_c = \frac{\hat{P} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}} =$$

$$Z_c = \frac{\frac{X}{40} - 0,3}{\sqrt{\frac{0,3(1-0,3)}{40}}}$$

$Z_c < -Z_\alpha$ $\Phi(Z_\alpha) = 1 - 0,02$

$\Phi(Z_\alpha) = 0,98$

$Z_\alpha = 2,06$

$$\frac{\frac{X}{40} - 0,3}{\sqrt{\frac{0,21}{40}}} < -2,06 = X < \left(-2,06 \cdot \sqrt{\frac{0,21}{40}} + 0,3\right) \cdot 40$$

$X < 6,03$

como es tamaño de muestra aproximamos por arriba

$\boxed{7}$

(121) Durante un periodo fijo de 414 días se observó la cantidad de accidentes diarios (X) que sufrieron los operarios de máquinas en cierta industria; los resultados que se obtuvieron se muestran en la siguiente tabla.

# accidentes	0	1	2	≥3
Frec. obs	296	74	26	18

Se tiene la idea de que estos datos se distribuyen Poisson $\lambda = 0,5$.

Usando el valor p de esta prueba se concluye que.

1 $H_0 = X \sim Poiss(0,5)$ Test chi-cuadrado

$H_a = X \nsim Poiss(0,5)$

2 Eph

$$\chi_c = \sum_{0}^{3} \frac{(O_i - e_i)^2}{e_i}$$ $e_i = nP_i$

P_i dependiendo de la distribución

un EMV para $\hat{\lambda}$ es $\bar{X}$

Entonces

$$\bar{X} = \frac{74+52+54}{414} = 0,43478 = \hat{\lambda}$$

$$np_0 = 414 \cdot \frac{e^{-\hat{\lambda}}\lambda^0}{0!} = 268,0258$$

$$np_1 = 414 \cdot \frac{e^{-\hat{\lambda}}\hat{\lambda}^1}{1!} = 116,5329$$

$$np_2 = 414 \cdot \frac{e^{-\hat{\lambda}}\hat{\lambda}^2}{2!} = 25,33$$

$$np_3 = 414 \cdot \frac{e^{-\hat{\lambda}}\hat{\lambda}^3}{3!} = 3,67$$

np_3 no cumple la regla empirica $np \geq 5$ entonces unimos clase

# accidente	0	1	2^+
Frec Obs	296	74	44
Frec esp	268,025	116,5329	29

$$X_c = \sum_0^2 \frac{(O_i - e_i)^2}{e_i} = \frac{(296-268,025)^2}{268,025} + \frac{(74-116,5329)^2}{116,5329} + \frac{(44-29)^2}{29}$$

$$X_c = 26,202$$

C = clases = 3

$K = \hat{\lambda} = 1$

$$\begin{aligned} p\text{-value} &= P(X^2_{(c-k-1)} > X_c) \\ &= P(X^2_{(1)} > X_c) \\ &= P(X^2_{(1)} > 26,202) \end{aligned}$$

$26,202 > 7,879$

p-value $< 0,005$ Rechazo Ho

Por tanto, el modelo distribuciona para estos datos no es Poisson

122) Se quiere determinar si el numero de accidentes fatales se encuentra distribuido de igual ~~manera~~ forma para el color de los automoviles involucrados en los accidentes. La organizacion obtuvo una muestra alea

tarra de 600 accidentes automovilisticos en los cuales ocurrio por lo menos una muerte y anoto el color del automovil. Se obtuvo la siguiente informacion:

	Rojo	cafe	Amarillo	Blanco	Gris	Azul
Fo	92	105	80	94	122	107
Fe	100	100	100	100	100	100

con $\alpha = 0,01$ se puede concluir que

$$X_c = \sum \frac{(O_i - e_i)^2}{e_i} = \frac{64}{100} + \frac{25}{100} + \frac{400}{100} + \frac{36}{100} + \frac{484}{100} + \frac{49}{100}$$

$$= 10,58$$

$$\begin{cases} H_0 = \forall\ P_i = P_{oi} \\ H_a = \exists i \ t.q\ P_i \neq P_{oi} \end{cases}$$

P-value

$$P(X^2_{(c-k-1)} > X_c)$$

$$P(X^2_{(5)} > 10,58)$$

$9,2 < 10,58 < 10,59$

$0,1 > P\text{-value} > 0,06$

No Rechazo Ho

Por tanto, la proporcion de accidentes es identica para todos los colores.

(123) En la fabricacion de semiconductores, a menudo se utiliza una sustancia quimica para quitar el silicio de la parte trasera de las obleas antes de la metalizacion. Se quieren comparar las velocidades de reaccion de dos soluciones quimicas utilizadas para este fin. Para esto se toman aleatoriamente 10 obleas y se le aplica la solucion quimica 1 y se mide las respectivas velocidades de reaccion los resultados muestrales ~~[illegible]~~ obtenidos fueron: velocidad promedio ~~[illegible]~~ de ~~[illegible]~~

9,97 m/s y una varianza de 0,178 $(m/s)^2$. De manera similar se seleccionan otras 10 obleas y se les aplica la solución química 2. Los resultados fueron: velocidad promedio 10,40 m/s y una varianza de 0,0533 $(m/s)^2$. Asuma que las velocidades de reacción para ambas soluciones son normales con varianzas iguales. Con un nivel $\alpha = 0,05$, se puede concluir que:

$\bar{x}_1 = 9,97$
$\bar{x}_2 = 10,40$
$S_1^2 = 0,178$
$S_2^2 = 0,0533$

1 $H_0 = \mu_1 - \mu_2 > 0$
$H_a = \mu_1 - \mu_2 \leq 0$

$X_1 \sim n(\mu_1, \sigma_1^2)$
$X_2 \sim n(\mu_1, \sigma_2^2)$

$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$
$n_1, n_2 = 10$

2 Eph

$$T_c = \frac{\bar{x}_1 - x_2}{SP\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

$$SP = \sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$$

$$T_c = \frac{9,97 - 10,40}{0,3398\sqrt{\frac{2}{10}}}$$

$$SP = \sqrt{\frac{9(0,178) + 9(0,053)}{18}}$$

$SP = 0,3398$

$\boxed{T_c = -2,8291}$

3 RR

$T_c < -t_{\alpha, gl}$

$T_c < -t_{0,05\,(18)}$

$T_c < -1,734$

-2,8291 -1,734

Rechazo Ho

Por tanto $\mu_1 < \mu_2$, es decir la rapidez de la reacción 1 es menor que la 2

124 En la fabricacion de bobinas de papel aluminio de uso industrial resulta de interés que el espesor sea lo mas homogeneo posible. El fabricante cuenta con una maquina A que hace girar el rodillo que recibe el material fabricado a 500 rpm, y otra maquina B que lo hace girar a 250 rpm. Se sospecha que esta diferencia de velocidades puede tener influencia en la calidad del producto final y por lo tanto el espesor del papel prodria ser diferente para ambas maquinas. Se decide tomar una muestra de 40 unidades de cada maquina y se miden los respectivos espesores. Los resultados obtenidos fueron: Maquina A, espesor promedio 41,70, desviacion estandar de 0,31, y Maquina B espesor promedio 41,61, desviacion estandar de 0,215. Usando esta informacion y un nivel $\alpha = 0,05$ se puede concluir que

1. $H_0 = \mu_1 - \mu_2 = 0$ $\quad n_1, n_2 = 40$
$H_a = \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ $\quad \bar{x}_1 = 41,70$
$n_1, n_2 \geq 30$ ✓ $\quad \bar{x}_2 = 41,61$
$S_1 = 0,31$
$S_2 = 0,215$

2. EPh

$$Z_c = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} = \frac{41,70 - 41,61}{\sqrt{\frac{(0,31)^2}{40} + \frac{(0,215)^2}{40}}} = \boxed{1,51}$$

3. P-value

$2P(z > |z_c|)$
$2P(z > 1,51)$
$2 - 2P(z < 1,51)$
$2 - 2\Phi(1,51)$

P-Value = 0,13104
No Rechazo Ho
Por tanto no hay evidencia significativa en los espesores del papel producido por ambas maquinas

(125) Un fabricante de calculadoras electrónicas afirma que menos del 1% de su producción es defectuoso. Para verificarlo se toma una muestra de 1200 calculadoras de manera aleatoria y se hallan 5 unidades defectuosas. Para esta hipótesis, el valor-P de la prueba es:

$\hat{p} = \frac{1}{240}$

1 $H_0 = \quad p \geq 0{,}01 \qquad n = 1200$

$H_a = \quad p < 0{,}01$

$n \geq 30$ ✓

2 E Ph

$$Z_c = \frac{\hat{P} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}} = \frac{1/240 - 0{,}01}{\sqrt{\frac{0{,}01(0{,}99)}{1200}}} = -2{,}031$$

3 P-value

$$P(z < z_c) = \Phi(-2{,}031) = 1 - \Phi(2{,}031)$$

$$= \boxed{0{,}02118}$$

(126) Se efectuó un estudio para determinar si los conductores preferían algunos carriles que otros, de una vía rápida con 4 carriles. La siguiente tabla contiene los resultados encontrados

	Carril	1	2	3	4	Total
O_i	Automóviles Observados	274	266	238	222	1000
e_i		250	250	250	250	

El valor P de la prueba es

$$X_c = \sum_{1}^{4} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} = \frac{576}{250} + \frac{256}{250} + \frac{144}{250} + \frac{784}{250} = \boxed{7{,}04}$$

$$\text{P-value} = P(X^2_{(c-k-1)} > X_c) = P(X^2_{(3)} > 7{,}04)$$

$6{,}251 < 7{,}09 < 7{,}407$

$\boxed{0{,}1 > P\text{-value} > 0{,}06}$

(127) El número de alumnos por semana que sufren algún tipo de accidente en un colegio durante un periodo de 36 semanas es resumido en la siguiente tabla

# Alumnos Accidentados	0	1	2	3	4
Frecuencia Observada	6	8	10	6	6

Se tiene la creencia de que el número de accidentes por semana es una variable aleatoria poisson. El valor del estadístico de prueba es:

Un EMV de $\hat{\lambda}$ es $\bar{X}$

$H_0: X \sim Poiss(\lambda)$ $n=36$

$H_a: X \sim Poiss(\lambda)$

$$\bar{X} = \frac{8+20+18+24}{36}$$

$e_i = np_i$

↳ depende de $\hat{\lambda}$

$$\bar{X} = 1{,}94 = \hat{\lambda}$$

$$np_0 = 36 \cdot \frac{e^{-\hat{\lambda}} \cdot \hat{\lambda}^0}{0!} = 5{,}1501$$

$$np_1 = 36 \cdot \frac{e^{-\hat{\lambda}} \cdot \hat{\lambda}^1}{1!} = 10{,}015$$

$$np_2 = 36 \cdot \frac{e^{-\hat{\lambda}} \cdot \hat{\lambda}^2}{2!} = 9{,}736$$

$$np_3 = 36 \cdot \frac{e^{-\hat{\lambda}} \cdot \hat{\lambda}^3}{3!} = 6{,}311$$

$$np_4 = 36 \cdot \frac{e^{-\hat{\lambda}} \cdot \hat{\lambda}^4}{4!} = 3{,}0677$$

np_4 no cumple la regla empírica $np \geq 5$, entonces juntamos clases

# Alumnos Accidentados	0	1	2	3+
Frec obs O_i	6	8	10	12
Frec esp e_i	5,1504	10,015	9,736	9,3786

$$X_c = \sum_{0}^{3} \frac{(O_i - e_i)^2}{e_i} = \frac{(6-5,1504)^2}{5,1504} + \frac{(8-10,015)^2}{10,015} +$$

$$\frac{(10-9,736)^2}{9,736} + \frac{(12-9,3786)^2}{9,3786}$$

$$\boxed{X_c = 1,2854}$$

128) Se sabe que la proporcion de personas que adquieren gripe despues de ser vacunadas es de 0,05. Si de una muestra aleatoria de 20 personas, dos o mas desarrollan la gripe, se considera que el porcentaje se ha incrementado: La probabilidad de error Tipo I en este caso es:

Error tipo I = (Rechazar Ho | Ho cierta)
(Rechazar Ho | Ho = 0,05)

$Ho = P \geq 0,1$
$Ha = P < 0,1$

$$\frac{0,05 - 0,1}{\sqrt{\frac{0,1(1-0,1)}{20}}} = -0,74$$

$P < 0,05 \mid P = 0,1$

$$P(Z < Z_c) = \Phi(-0,74) = 1 - \Phi(0,74) = \boxed{0,22965}$$

129) Historicamente, las proporciones de todas las personas de origen caucasico en Estados Unidos con fenotipos sanguineos A, B, AB y O son 0.41, 0.1, 0.04 y 0.45, respectivamente. Para determinar si las proporciones ~~[illegible]~~ actuales de poblacion

todavia se comparan con estos valores historicos, se Selecciono una muestra aleatoria de 200 estadounidenses caucasicos y se registraron sus fenotipos sanguineos. Los numeros observados con cada fenotipo se dan en la siguiente tabla

	A	B	AB	O
O_i	89	18	12	81
P_i	0,41	0,1	0,04	0,45
e_i	82	20	8	90

$e_i = nP_i$

El valor P de esta prueba es

1 $H_0 = \forall \; P_i = P_{0i}$
$H_a = \exists i \text{ t.q. } P_i \neq P_{0i}$

2
$$X_C = \sum_{1}^{4} \frac{(O_i - e_i)^2}{e_i} = \frac{49}{82} + \frac{4}{20} + \frac{16}{8} + \frac{81}{90}$$

$$= 3,69$$

3 P-value

$$P(X^2_{(c-k-1)} > X_c)$$

$$P(X^2_{(3)} > 3,69)$$

$3,69 < 6,251$

$\boxed{\text{p-value} > 0,1}$

(13C) Historicamente, la proporcion de clientes que compran con tarjeta de credito en determinado almacen es como minimo 0,3. Los dueños del almacen piensan que dicha proporcion ha bajado. De los ultimos 35 clientes, 4 compran con tarjeta de credito. El valor-P de la prueba es

$\hat{P} = \frac{4}{35} = 0,1143$

1
$H_a \; P \geq 0,3$
$H_0 = P < 0,3$

$n = 35$

$n \geq 30$ ✓

2

$$Z_c = \frac{\hat{P} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}} = \frac{0,1143 - 0,3}{\sqrt{\frac{0,3(0,7)}{35}}} = -2,39$$

3 P-value $= P(Z < Z_c)$

$= \Phi(-2,397)$

$= 1 - \Phi(2,397)$

$\boxed{= 0,00826}$

(13) Estudios realizados sobre los hábitos de venados de cola blanca indican que estos viven y se alimentan en praderas muy limitadas. Para determinar si difieren las praderas de venados situadas en dos zonas geográficas diferentes, los investigadores atraparon, marcaron y pusieron pequeños radiotransmisores a 40 venados. Varios meses después los venados fueron rastreados e identificados y se registró la distancia desde el punto en que fueron soltados. La media y la desviación estándar de las distancias desde el punto en que fueron soltados se muestran en la siguiente tabla

	Ubicación 1	Ubicación 2
Tamaño de muestra	40	40
Media Muestral	2980	3205
Desviación estándar Muestral	1140	963
Media Poblacional	μ_1	μ_2

Se cree que las distancias medias difieren para los dos lugares geográficos

La conclusión usando un $\alpha = 0,05$ es

1 $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$

$H_a: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

$n_1, n_2 \geq 30$

$n_1 = 40$ $S_1 = 1140$

$n_2 = 40$ $S_2 = 963$

$\bar{X}_1 = 2980$

$\bar{X}_2 = 3205$

2

$$Z_c = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} = \frac{2980 - 3205}{\sqrt{\frac{(1140)^2}{40} + \frac{(963)^2}{40}}} = -0{,}9535$$

3

$$\begin{aligned} \text{P-value} &= 2P(Z > |Z_c|) \\ &= 2P(Z > 0{,}9535) \\ &= 2 - 2\Phi(0{,}9535) \\ &= 0{,}6597 \rightarrow 0{,}3403 \end{aligned}$$

No Rechazo Ho

No hay evidencia significativa entre las distancias medias a ambos ubicaciones.